

THÈSES

présentées à la Faculté des Sciences de Nancy
pour obtenir le Grade de Docteur-Ingénieur

par

JEAN SERRA

Ingénieur civil des Mines

Première thèse :

**Echantillonnage et estimation locale
des phénomènes de transition miniers**

Deuxième thèse :

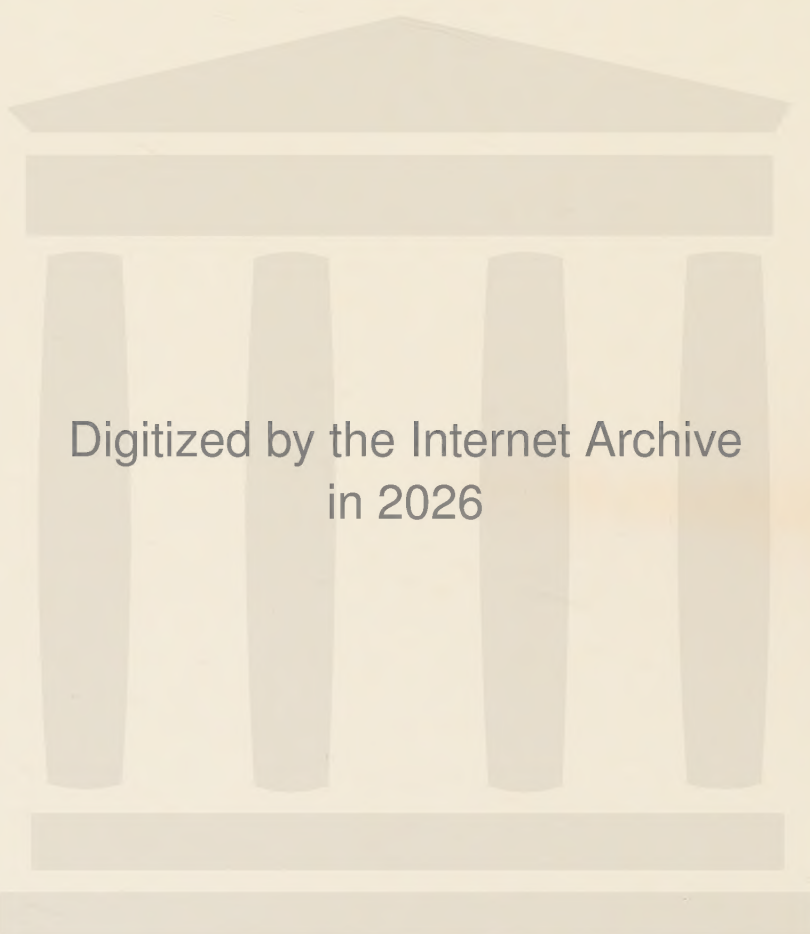
Propositions données par la Faculté

Soutenues publiquement le 25 octobre 1967
devant la Commission d'examen

Président : M. B. Schwartz

Examineurs : MM. Bernard
Matheron

Invité : M. Bubenicek



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555003_0012

THÈSES

présentées à la Faculté des Sciences de Nancy
pour obtenir le Grade de Docteur-Ingénieur

par

JEAN SERRA

Ingénieur civil des Mines

Première thèse :

**Echantillonnage et estimation locale
des phénomènes de transition miniers**

Deuxième thèse :

Propositions données par la Faculté

Soutenues publiquement le 25 octobre 1967
devant la Commission d'examen

Président : M. B. Schwartz

Examineurs : MM. Bernard

Matheron

Invité : M. Bubenicek

THESIS

Presented to the Faculty of the University of Leiden
in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy

BY
J. VAN DER WERF

Leiden, 1914

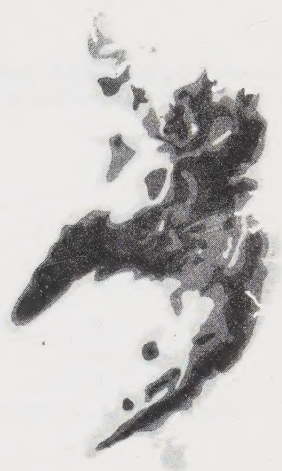
Thesis presented to the Faculty of the University of Leiden
in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy

Thesis presented to the Faculty of the University of Leiden
in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy



Thesis presented to the Faculty of the University of Leiden
in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy

Presented to the Faculty of the University of Leiden
in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy



Gisement de fer de Lorraine
courbes d'isopuissances de la couche grise

Gisement de fer de Lorraine
courbes d'isopuissances de la couche grise

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JULY - LAPORTE - EICHHORN - GODEMENT - DUBREUIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MELLEMAN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDER - OLMER - CORNUBERT - CHAPPELLE - GUERIN - WAHL.

Maîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET.

Professeurs

MM. DELSARTE	Analyse supérieure
ROUBAULT	Géologie
CHAPPELLE	Mécanique rationnelle
VEILLET	Biologie animale
BARRIOL	Chimie théorique
BIZETTE	Physique
GUILLIEN	Electronique
GIBERT	Chimie physique
LEGRAS	Mécanique rationnelle
BOLFA	Minéralogie
NICLAUSE	Chimie
FAIVRE	Physique appliquée
AUBRY	Chimie minérale
COPPENS	Radiogéologie
DUVAL	Chimie
FRUHLING	Physique
HILLY	Géologie
LE GOFF	Génie chimique
SUHNER	Physique expérimentale
CHAPON	Chimie biologique
HEROLD	Chimie minérale industrielle
SCHWARTZ B.	Exploitation minière
★ MALAPRADE	Chimie

(★ Professeur titulaire à titre personnel)

MM. MANGENOT	Botanique
GAYET	Physiologie
BONVALET	Mécanique appliquée
HADNI	Physique
* BASTICK	Chimie
DUCHAUFOR	Pédologie
GARNIER	Agronomie
NEEL	Chimie organique industrielle
BERNARD	Géologie appliquée
* CHAMPIER	Physique
* GAY	Chimie biologique
STEPHAN	Zoologie
* CONDE	Zoologie
* WERNER	Botanique
EYMARD	Calcul différentiel et intégral
LEVISALLES	Chimie organique
Mme HERVE	Méthodes mathématiques de la physique
FELDEN	Physique
* GOSSE	Mécanique physique
* DAVOINE	Physique (E. N. S. M. I. M.)
N...	Chimie biologique

(* professeur titulaire à titre personnel)

Maîtres de conférences

Mme BASTICK	Chimie M. P. C. Epinal
MM. GUDEFIN	Physique
ROCCI	Géologie
VUILLAUME	Psychophysiologie
FRENTZ	Biologie animale
HORN	Physique propédeutique
LAFON	Physique (I. S. I. N.)
MARI	Chimie (I. S. I. N.)
AUROUZE	Géologie
DEVIOT	Physique du solide
FLECHON	Physique M. P. C.
Mlle HUET	Mathématiques S. P. C. N.
VIGNES	Métallurgie

MM. BALESSENT	Thermodynamique chimique appliquée
BLAZY	Minéralogie appliquée (E. N. S. G.)
JANOT	Physique M. P. C. Epinal
JACQUIN	Pédologie et chimie agricole
MAINARD	Physique M. G. P.
CACHAN	Entomologie appliquée (E. N. S. A.)
MARTIN	Chimie M. P. C.
PAULMIER	Mécanique expérimentale
PROTAS	Minéralogie
COURTILLOT	Mécanique des fluides (I. S. I. N.)
JOZEFOWICZ	Physico-chimie
JURAIN	Géologie propédeutique B. G.
RIVAIL	Chimie appliquée (CUCES)
VILLERMAUX	Génie chimique
METCHE	Biochimie appliquée (Brasserie)

A mes parents

REMERCIEMENTS

Sans l'aide de ceux qui m'ont entouré, il ne m'aurait pas été possible de tenter cette synthèse de quatre années de travaux. C'est avec la plus profonde reconnaissance que je suis heureux de remercier en particulier

le professeur B. SCHWARTZ, président de mon jury de thèse
le professeur A. BERNARD, membre de ce jury
le docteur G. MATHERON, membre du jury et rapporteur de ma thèse
le Chef de division de l'I.R.S.I.D., L. BUBENICEK, membre invité

qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury.

Monsieur Georges MATHERON a bien voulu accepter de diriger mon travail, m'apportant une aide exceptionnelle, par sa qualité et sa générosité, et, malgré toutes mes insuffisances, inlassable.

A l'Institut de Recherches de la Sidérurgie, mes supérieurs m'ont tous honoré de leur confiance et de leurs conseils ; monsieur Louis BUBENICEK, en particulier, m'a fait découvrir et aimer sa vision de la géologie ; mes collègues et adjoints du Service géologique, techniciens et géomètres, m'ont fourni une contribution intellectuelle et matérielle considérable, et les autres secteurs techniques auxquels j'ai eu recours, notamment celui de la programmation, m'ont souvent rendu service au delà de mes espérances.

Les Sociétés minières du gisement de fer de Lorraine ont eu la courtoisie de me laisser les gêner, fouiller leurs archives, déranger leur exploitation pour des campagnes de mesures, solliciter de leurs ingénieurs des dialogues indispensables pour me permettre de cerner les directions de recherches les plus utiles.

Enfin, nombre d'amis et d'autres chercheurs m'ont souvent aidé, réconforté et fait bénéficier d'échanges de vues fructueux.

Que tous trouvent ici l'expression de ma gratitude.

ERRATA

- Page 19 : Ligne 6 - manque un astérisque après "méthodologie"
 Bas de la page - manque un astérisque avant "cours à l'Ecole des Mines de Nancy"
- Page 30 : Ligne 18 - "en tout petits tronçons"
- Page 32 : Dernière ligne - "les covariances $\sigma_{z_i z_j}$ "
- Page 34 : Ligne 13 - "Cette notion est"
- Page 38 : Ligne 10 - "à droite du signe égale"
 Ligne 16 - "on aurait pris un autre panneau $\mathcal{P}'$ "
- Page 41 : Ligne 19 - "indifférenciée"
 Ligne 20 - "traduire en termes"
- Page 43 : Ligne 5 - "et nous poser la question"
- Page 46 : Ligne 4 - "bien que $\gamma(0) = 0$ "
- Page 47 : Ligne 16 - "de Wijsien"
- Page 49 : Ligne 7 - "un $\gamma(h)$ de la forme $\gamma(Q)$ "
 Ligne 9 - " $Q = \sum_{ij} a_{ij} h_i h_j$ "
- Page 51 : Ligne 21 - "moyenne du grand panneau $\mathcal{P}$ "
- Page 52 : Formule II-5 - $\sigma_{\mathcal{P}}^2 = \frac{1}{V} \int_V \int_V \gamma(x-x') dx dx' - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-x') dx dx'$
 Formule II-6 - $F(V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-x') dx dx'$
- Page 53 : Ligne 5 - " $V \rightarrow \infty$ "
 Ligne 19 - "du vecteur h "
- Page 54 : Ligne 4 - "du panneau P au panneau P' "
 Ligne 15 - "champ arbitraire $\mathcal{P}'$ "
- Page 55 : Ligne 7 - "notion cruciale"
 Ligne 18 - "suivant la verticale"

Page 58 : Ligne 10 - "il est apparu"

Page 74 : Ligne 22 - "principaux pour les"

Page 90 : Ligne 2 - "dans tout l'espace"

Page 117 : Ligne 17 - "par exemple la portée"

Page 128 : Ligne 11 - "une province ferrifère"

Page 131 : Ligne 13 - "où cet élément est "

Page 140 : Ligne 19 - "c'est-à-dire"

Page 142 : Ligne 9 - "de Wijsiens"

Page 154 : Ligne 12 - " $\gamma(r) = C_o E(r) + \gamma_1(r)$ "

Page 158 : Ligne 13 - "on retrouve le développement (IV, 21, troisième partie) du chapitre IV"

Page 161 : Ligne 18 - "au risque d'erreur classique de 5 % "

Page 162 : Ligne 1 - $\frac{\tilde{u}}{\tilde{\epsilon}} \dots$

Dernière ligne - $\frac{\tilde{u}}{\tilde{\epsilon}} \dots$

Page 164 : Ligne 15 - "pour que le recours"

Page 165 : Ligne 15 - "compte tenu de (VI, 18) "

Page 165 : Formule (VI, 19) - " $C_{ii} = \bar{P}_i (1 - \bar{P}_i)$ "
" $C_{ij} = - \bar{P}_i \bar{P}_j$ "

Page 167 : Formule (VI, 26) - Fermer la parenthèse à l'extrémité droite de la formule

Page 174 : Ligne 6 - " $n \text{ m } \frac{\rho_o v}{g}$ "

Ligne 7 - "teneur pondérale γ en écrivant"

Page 175 : Ligne 10 - "variance de pépite"

Page 177 : Ligne 7 - "raisonnement"

Ligne 11 - "complexes des montées"

Ligne 17 - "nous restreindrons"

Page 183 : Ligne 4 - "la base du cylindre"

Page 186 : Ligne 12 - "au chapitre IV (3ème partie)"

Page 189 : Ligne 9 - " $P_1 = P_2 = 1$ "

Ligne 15 - "s'attendre pour les minerais"

Page 197 : Ligne 4 - "changements latéraux"

Page 207 : Dernière ligne - $D^2 (z - z^*)$

Page 208 : Formule VII-5 - $\sum_{j=1}^{n-1} a_j R_{ij} = N_i$

$$N_i = \sigma_{zxi} - \sigma_{zxn} - \sigma_{in} + \sigma_{nn}^2$$

Page 209 : Ligne 12 - "le problème se formulera"

Page 218 : Ligne 16 - " λ et μ étant déterminés "

Page 221 : Ligne 15 - "krigeage aléatoire (par. 5)"

Page 223 : Ligne 16 - "que l'effet de pépite"

Page 234 : Ligne 2 - " $\frac{1}{c} \sigma_k^2 = \dots$ "

Page 241 : Formule VII-14 -

$$\mu = \frac{N_y R_x - N_x R_{xy}}{R_x R_y - (R_{xy})^2}$$

Page 249 : Ligne 15 - "mais est lui-même"

Page 255 : Dernière ligne - "dans le panneau $\tilde{II}$, ou dans le panneau $\mathcal{A}$ "

Page 258 : Ligne 4 - "de côtés 3ℓ , $3h$ "

Page 260 : Ligne 1 - "la structure aléatoire de l'échantillonnage x "

Page 272 : Ligne 9 - " $\frac{1}{c} \sigma_k^2 = \dots$ "

Page 295 : Ligne 1 - " $\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{s^2} \dots$ "

Page 309 : Ligne 18 - " à l'aide de la relation (VIII. 5, 10) de l'ouvrage
" les variables régionalisées et leur estimation",
de G. Matheron"

Page 321 : Ligne 8 - " $\sigma_{o/v}^2 - \sigma_{o/v}^2$ "

Dernière ligne - la dernière intégrale est :

$$\frac{1}{\pi v^2} \int_v \int_v \frac{\kappa(z-z')}{v} \gamma(z-z') dx dx'$$

Page 356 : Formule (X-11) - " $B_2 = \dots$ "

Page 357 : Formule (X-22) - " $E(B_2) = \dots$ "

Ligne 2 - " $B_1 = 0$ "

Page 358 : Formule (X-23) - " $E'(B_2) = \dots$ "

Formule (X-24) - " $E'(B_1) = 0$ "

Page 361 : Ligne 5 - " $E(B_3) = \dots$ "

Page 362 : Formule (X-29) - " $E(B_3) = \dots$ "

Page 417 : Ligne 3 - "ne comporte pas"

Page 485 : Formule (IV,62) - supprimer le terme $+ 2D$

Page 606 : Figure 85 - "KRIGEAGE ALEATOIRE"

Page 634 : Ligne 2 - "est la somme de $\frac{1}{2}\sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2$
c'est-à-dire $\sigma_E^2 = \frac{1}{2}\sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2 = 0,30 \text{ m}^2$ "

Prenons les fourchettes classiques de $\pm 1,5 \sqrt{\sigma_E^2}$

ECHANTILLONNAGE ET ESTIMATION LOCALE
DES PHENOMENES DE TRANSITION MINIER

APPLICATION AU GISEMENT DE FER DE LORRAINE

1ère partie : Exemples et modèles de phénomènes de transition

2ème partie : Problèmes géostatistiques

3ème partie : Etudes pratiques de géostatistique

PREMIERE PARTIE

EXEMPLES ET MODELES DE PHENOMENES DE TRANSITION

CHAPITRE I

INTRODUCTION

1. BUT DE L'ETUDE

Cet ouvrage s'inscrit dans le cadre de la géostatistique de G. MATHERON. Il constitue une étape dans l'application de la géostatistique, caractérisée par tous les problèmes qu'a posé, aux diverses échelles, l'estimation actuelle du gisement de fer de Lorraine.

Au cours de ces cinq dernières années, les hommes et les circonstances ont fait que les mines de fer ont posé à la géostatistique, successivement trois problèmes, ou groupes de problèmes, distincts quant à leur énoncé. Il s'est d'abord agi d'estimations locales, couchées dans une concession, panneaux miniers de quelques centaines de mètres, et à la limite, prévision mensuelle ou trimestrielle de l'exploitation. Un peu plus tard le centre d'intérêt s'est déplacé vers les problèmes d'échantillonnages des minerais en place, en bonne partie parce que la réponse au premier problème apparaissait grandement conditionnée par le second. Enfin, plus récemment, le problème de l'estimation à grande échelle s'est trouvé à l'ordre du jour. Il s'agissait cette fois d'un inventaire au niveau du bassin entier, mais au demeurant aussi peu rigide que possible. Il fallait mettre au point une méthode de calcul des réserves qui permit d'en déterminer l'évolution en fonction des modifications des teneurs limites, ou de n'importe quel autre paramètre utile à l'enrichissement, et qui d'autre part, n'indiquât pas seulement le chiffre des réserves correspondant à telle ou telle limitation, mais surtout, la localisation des dites réserves.

C'est seulement au cours de leur étude que sont apparus tous les liens qui rapprochaient ces trois problèmes. Ne parlons pas du dénominateur commun

économique, évident, puisque tous les trois étaient relatifs au même gisement ; mais les liaisons d'ordre logique et méthodologique.

En effet, il apparaît à l'expérience que le paramètre de mesure géostatistique, le variogramme, qu'on calcule à diverses échelles, (dix microns, un centimètre, un mètre, cent mètres, cinq kilomètres), selon le problème d'estimation que l'on a à traiter, possède régulièrement la même allure, et, à peu de choses près, peut être ajusté à un même modèle.

Nous reviendrons plus loin sur la définition mathématique du variogramme, mais disons dès maintenant que dans le gisement lorrain, la caractéristique commune à chacune de ces fonctions, est de tendre plus ou moins vite vers une valeur constante. L'ensemble de toutes les structures vérifiant cette propriété a été baptisé du terme de phénomènes de transition par G. MATHERON dans son ouvrage, "Les variables régionalisées et leur estimation".

L'étude des phénomènes de transition du gisement de fer lorrain peut donc se dérouler sur deux plans de nature différente, mais dont les incidences pratiques sont parfois liées. D'un point de vue géologique d'abord, on peut se demander ce que veulent dire les phénomènes de transition qui apparaissent à l'expérience. Nous réduirons ici ce premier aspect au strict minimum. Du point de vue minier, on peut aussi étudier comment les problèmes d'estimation se posent dans les minéralisations structurées par des phénomènes de ce type.

Ces deux aspects correspondent, sur le plan du langage, à deux termes. On appelle variable régionalisée toute grandeur dont la répartition spatiale présente de l'intérêt et l'on définit par géostatistique un centre

d'intérêt bien particulier, celui de l'estimation d'une variable régionalisée, minière.

Le texte qui suit est essentiellement une étude géostatistique.

2. PLAN DU TEXTE

Pour présenter clairement l'architecture de cette étude, distinguons, comme le conseille B. SCHWARTZ dans son cours de méthodologie , les paramètres de mesure du paramètre d'étude.

Les paramètres de mesure sont toutes les quantités qui interviennent dans le problème qu'on se pose, qu'elles soient mesurables ou simplement repérables. Une analyse chimique est une mesure, la donnée d'un faciès géologique est un repère.

Le paramètre d'étude est la notion clef qui permet de formuler en termes mathématiques le problème posé. Dès l'instant où le paramètre d'une étude est bien construit, il n'y a plus de difficultés théoriques. Tout cas particulier se réfère à lui et sa résolution est une simple question de calculs et d'approximations astucieuses.

En géostatistique, le paramètre d'étude que nous utiliserons est la "variance d'extension". On vient de voir qu'il s'agit d'un point de départ et d'un point d'arrivée.

C'est d'abord un point d'arrivée : il faut en effet déterminer les variances d'extension à partir des paramètres mesurables , qui seront dans le cas présent au nombre de trois :

Cours de l'Ecole des Mines de Nancy

- prélèvements miniers
- plans des reconnaissances et des panneaux à exploiter
- variogramme expérimental.

Dans une première partie, nous définirons donc le paramètre d'étude (ch. II). Le calcul théorique de ses liens avec les trois paramètres de mesure sera explicité aux chapitres II et III. Au chapitre IV, on résoudra numériquement moyennant certaines approximations (panneaux de forme très régulière) les relations de base du chapitre II, dans plusieurs cas où le variogramme reflète un phénomène de transition.

On considèrera ensuite notre paramètre d'étude comme une base de départ pour les problèmes concrets qu'il permet de formuler. C'est l'objet de la seconde partie. Elle commence par la définition et le classement de ces problèmes vis à vis de la hiérarchie des régionalisations. La notion de gisement qui a été adoptée, ramenant ces magnifiques boursouflures de la terre à de vulgaires opérations technologiques, risque de paraître un peu sèche à un métallogéniste. Mais c'est volontairement qu'a été méconnu l'aspect "d'anomalie de l'écorce terrestre" des gisements. Il n'est pas nécessaire de considérer ce point de vue quand, s'étant placé à leurs échelles ou au-dessous, on cherche à estimer à partir de leur intérieur de pareilles anomalies. C'est après tout la même limitation, qui dans une régionalisation, permet de négliger les échelles plus vastes que celle du phénomène de transition qui retient notre attention. Le classement des problèmes d'estimations minières débouche sur la succession des cinq chapitres suivants.

Vient d'abord l'étude de l'effet de pépité (ch. VI), c'est-à-dire de l'impact des microrégionalisations, plus ou moins parasites, sur celle qu'à proprement parler on estime ; cette étude se termine par les règles d'échantillonnage des minerais lorrains en place. Arrive ensuite l'étude du krigeage (ch. VII), c'est-à-dire de l'estimation d'un panneau particulier, entouré de peu de sondages, au moins dans son environnement proche ; le krigeage est appliqué à trois problèmes, la prévision de la production à date fixe au niveau des quartiers en exploitation, l'estimation, panneau par panneau, d'une concession reconnue par un traçage et un échantillonnage à maille régulière, enfin la localisation des zones payantes, même quand l'échantillonnage n'est pas très régulier, au niveau des grands ensembles du gisement. Le chapitre VIII est relatif à l'effet de transition ultime, celui de l'extension du gisement, problème de nature géométrique. Le chapitre suivant (n° IX) prolonge les trois précédents et cherche à déterminer la précision d'une campagne de reconnaissance par composition des variances d'extension élémentaires et inversement de choisir le meilleur procédé de reconnaissance pour un budget, ou pour une précision imposée. Le chapitre X, enfin, reprend l'ensemble des résultats acquis pour élaborer un mode de calcul des réserves et l'exploiter à des fins d'économie minière.

Les trois derniers chapitres, qui ne sont que le rappel d'études antérieures, dues à G. MATHERON ainsi qu'à Ph. FORMERY, ont été, pour cette raison, placés de façon annexe par rapport aux autres. On les a cependant introduits explicitement sous forme de résumés, car ils traitent de problèmes miniers particulièrement courants.

En dernier lieu, viennent les "études pratiques de géostatistique". Comme toute science encore nouvelle, la géostatistique est déroutante par son vocabulaire, ses formules et certains modes de raisonnements. Nous avons organisé cette troisième partie pour qu'elle permette au néophyte d'affronter la géostatistique sans s'y sentir submergé. Elle commence par un lexique des termes courants en géostatistique. Les définitions sont simples et brèves. Suivent ensuite, classées suivant l'ordre des chapitres des deux premières parties, toutes les formules et abaques dont on aura besoin. L'important étant non seulement de pouvoir retrouver facilement une formule ou un mode opératoire d'estimation, mais surtout de savoir exactement son domaine de validité, nous avons donc soigneusement détaillé toutes ces limitations et, quand cela était assez simple, fourni la signification physique de tel ou tel résultat théorique. Enfin, une série de douze exercices-type, de difficulté nulle ou moyenne, mais visant chacun une étape cruciale du raisonnement ou de l'expérimentation, sont placés au fil des chapitres pour jalonner la progression du lecteur d'illustrations concrètes.

CHAPITRE II

RESUME DE LA THEORIE INTRINSEQUE DES VARIABLES REGIONALISEES

Après avoir introduit au premier paragraphe la notion d'erreur dans une estimation minière, on critique (par. 2) le concept usuel de variance, qui ne tient pas compte des liaisons mutuelles entre les individus d'un échantillon.

Ces critiques débouchent sur la théorie des variables régionalisées (par. 3), dont seule la partie relevant de l'hypothèse intrinsèque (par. 4) est traitée ici. On définit la variance d'un petit volume v dans un grand volume V . La formule de Krige, qui relie ces variances dans divers volumes, explicite la signification de l'hypothèse intrinsèque, selon laquelle les lois statistiques qui régissent le phénomène régionalisé restent les mêmes dans tout le champ.

L'un des moments statistiques, la variance d'extension, permet de répondre aux problèmes d'estimation minière (par. 5). On calcule cette variance à partir de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ ou demi-variogramme (par. 6).

Le paragraphe 7 étudie les propriétés et la signification du $\gamma(h)$ qui reflète les caractères structuraux majeurs de la régionalisation.

Les paragraphes 8 et 9, plus techniques, précisent les relations entre le $\gamma(h)$ et les diverses variances.

Le chapitre se termine sur une généralisation de la notion de fonction intrinsèque au cas où l'on définit plusieurs variables dans un même champ (ex. puissances et teneurs). On utilise alors la matrice de codispersion intrinsèque.

1. LA NOTION D'ERREUR

Pour connaître la teneur d'un panneau minier P, nous disposons d'un nombre très limité de prélèvements, par exemple un seul, S, qui pour les besoins de l'exposé titrera la valeur $z^{\star} = 33 \%$ de fer, alors que nous désirons mesurer la teneur z, bien particulière, mais inconnue de tout le panneau P.

Force nous est d'utiliser le seul chiffre dont nous disposons et de déclarer "on estimera à 33 % la teneur du panneau P". En agissant ainsi, nous commettons fatalement une erreur, qui vaut par définition $z - z^{\star}$, à savoir la teneur du panneau diminuée de celle de son estimation.

Comment caractériser cette erreur ? Comment connaître si notre estimateur était très fantaisiste ou au contraire excellent ? Nous ne pouvons pas nous intéresser brutalement à $z - z^{\star}$ puisque l'un des deux termes, la teneur z du panneau n'est pas directement accessible ; à moins d'attendre que l'on ait fini de l'exploiter pour commencer d'en parler.

Nous pouvons par contre procéder indirectement. Supposons, pour le moment, que l'implantation du sondage S dans le panneau P ne joue pas un rôle privilégié : on l'a mis n'importe où, sans chercher à lui donner de position centrale par exemple. Puisque nous ne tenons pas compte du point d'impact de S, imaginons une série d'expériences où on l'a à chaque fois placé dans tous les endroits possibles de P. A chaque position correspond une

valeur de z^* , et donc de l'erreur $z - z^*$. Classons les valeurs prises pour cette erreur en construisant le diagramme de fréquences de leur apparition (fig. 1) :

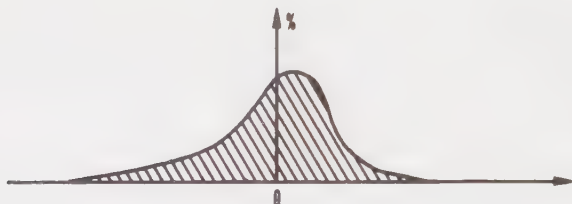


Fig. II 1 - Diagramme de fréquence de l'erreur $z - z^*$

Par définition de la teneur z du panneau, la valeur moyenne de $z - z^*$ est évidemment zéro. Nous devons donc trouver un autre paramètre pour caractériser simplement l'erreur $z - z^*$. Choisissons d'adopter la moyenne, non plus de $z - z^*$, mais de son carré : il reste toujours positif et représentera beaucoup mieux la dispersion de notre variable. Cette valeur moyenne du carré de l'erreur est appelée sa variance et est désignée par le symbole σ^2 :

$$(1) \quad \sigma^2 = E(z - z^*)^2 = \text{moyenne de } (z - z^*)^2$$

(la lettre E précédant une expression veut dire "moyenne de ce qui suit).

Insistons sur le contenu physique de la définition précédente. Si l'on matérialise la partie hachurée de la figure 1, la variance est exactement le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe Oy, qui passe par la moyenne. On voit donc la signification de σ^2 : c'est un degré d'exactitude, un moment de dispersion autour de la valeur centrale z , et elle joue le même

rôle qu'une énergie mécanique.

On relie souvent la variance d'une distribution statistique à des fourchettes de probabilités, et l'on sait que pour les lois normales 95 % de la surface hachurée sont compris entre plus et moins 2 fois σ autour de la moyenne (σ , racine carrée de la variance est appelé "l'écart-type"). Cette propriété, particulière à la loi normale (et par conséquent sûrement fausse dans le cas de la figure 1, où la répartition est dissymétrique) ne nous servira pas pour établir les raisonnements : le paramètre de la variance est suffisamment représentatif par lui-même. Pour concéder à l'usage on fournira dans les illustrations numériques les fourchettes traditionnelles associées, bien qu'il n'y ait rien là de très utile.

Nous voilà donc nantis d'un paramètre pour mesurer les erreurs. Mais, objectera-t-on, vous avez rejeté tout à l'heure l'expression de l'erreur elle-même, $z - z^*$, car elle faisait intervenir la teneur z , inconnue, du panneau, et vous la remplacez par sa variance, dont le calcul nécessite le même renseignement, et vous oblige, de plus, à implanter tous les sondages possibles dans le panneau P : qu'est-ce que vous avez bien pu y gagner ? Apparemment rien, certes. Mais concrètement une possibilité d'estimation supplémentaire. On conçoit bien que, dans un champ homogène, les variances des sondages de deux panneaux de même taille ne différeront pas beaucoup et, de plus, qu'une petite erreur sur un paramètre qui lui-même rend compte d'une erreur n'est pas très gênante. Expérimentalement, des variances locales peuvent être mesurées dans les régions bien reconnues ou déjà exploitées, il appartient ensuite au calcul géostatistique d'en déduire des renseignements pour les régions moins bien reconnues. Ce sont ces passages, d'un échantillonnage à un autre, et d'un champ à un autre que nous allons aborder maintenant.

2. CRITIQUE DE LA NOTION USUELLE DE VARIANCE

Le passage d'une variance à une autre n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser et nous amène très vite à des résultats paradoxaux. Prenons un exemple. Le même quartier d'une mine est reconnu par des prélèvements au fond de 10 kg, et exploité à l'aide de tirs de 100 tonnes. On veut savoir quelle est la variance de ces tirs, et si leur teneur peut être considérée comme constante. Le calcul statistique usuel nous enseigne que la variance d'un échantillon est inversement proportionnel à sa taille, c'est-à-dire ici son poids. D'où ce résultat étonnant : la variance des volées doit être 10 000 fois plus faible que celle des prélèvements ; ou encore : si la fourchette d'erreur des prélèvements prend la valeur énorme de 20 points, celle des volées est alors de 0,2 points (donc plus faible que les erreurs d'analyse chimique). Ce qui voudrait dire que tous les tirs du gisement ont exactement la même teneur ou bien qu'il y a quelque chose de vicieux dans l'application, aux problèmes miniers, de la statistique ordinaire.

Pour bien voir où se situe la faute de raisonnement, fournissons encore un exemple, dans le même style que le précédent. On connaît certaines pratiques qui consistent à découper les sondages en tous petits tronçons pour avoir plus d'informations^{*}. L'idée qui provoque ces techniques est toujours la

* Nous ne songeons pas du tout ici au problème de la détermination du pied de couche, qui demande parfois des découpages fins en certains endroits des sondages, et pour une raison bien légitime. Nous pensons plutôt à certains sondages du gisement qui sur les 4 mètres de traversée de la couche grise sont découpés en 80 morceaux de 5 centimètres.

même : la variance est inversement proportionnelle à la taille de l'échantillon, ici prise en nombre ; si, sur la longueur de traversée d'une couche, un sondage a été découpé en 400 morceaux, on connaît l'estimation de cette couche avec une fourchette 20 fois plus faible. A la limite, on pourrait dire qu'il suffirait de découper le sondage en un million de tronçons pour connaître toute la couche avec une précision excellente. Comme d'autre part la valeur moyenne des 400 tronçons, ou des millions de petits morceaux, est toujours la même, à savoir celle du sondage intégralement broyé, cette valeur est donc, avec la précision que l'on voudra (il suffit de multiplier les morceaux fictifs) celle de la couche entière : tous les sondages de la couche grise auraient donc, théoriquement, la même valeur.

Mais quelle est donc cette démarche théorique du calcul statistique, qui nous amène régulièrement devant des absurdités ? Suivons pas à pas la démonstration de la loi de variance inversement proportionnelle à la taille de l'échantillon. Reprenons les notations précédentes : z est la teneur du panneau et z^* celle du sondage S , constitué des n petits tronçons de teneurs $z_1, z_2, \dots, z_n$.

$$z^* = \frac{1}{n} (z_1 + z_2 + \dots + z_n)$$

la variance des petits tronçons, qu'on appellera $\sigma_{z_i}^2$ est

$$\sigma_{z_i}^2 = E(z - z_1)^2 = E(z - z_2)^2 = \dots = E(z - z_n)^2$$

la variance du sondage entier dans le panneau P est $\sigma_{z^*}^2$

$$\sigma_{z^*}^2 = E(z - z^*)^2$$

Exprimons cette variance en fonction de celle des blocs élémentaires, $\sigma_{z_i}^2$:

$$\sigma_{z^*}^2 = \frac{1}{n^2} E \left[(z - z_1) + (z - z_2) + \dots (z - z_n) \right]^2$$

soit, en développant le carré :

$$(2) \sigma_{z^*}^2 = \frac{\sigma_{z_i}^2}{n} + \frac{2}{n^2} E \left[(z - z_1)(z - z_2) + (z - z_1)(z - z_3) + \dots \right]$$

La variance du sondage S, $\sigma_{z^*}^2$ est donc la somme de deux termes. Le premier représente effectivement $\sigma_{z_i}^2$ la loi classique : variance du bloc élémentaire divisée par le nombre de ces blocs dans l'échantillon global. Mais il y en a un autre. Qu'est-ce qu'il veut dire ? $E(z - z_1)(z - z_2)$ est la covariance entre les petits tronçons n° 1 et 2 du sondage, une quantité proportionnelle à leur coefficient de corrélation. Si cette covariance, qu'on nommera par la suite $\sigma_{z_1 z_2}$, est nulle, cela veut dire qu'il y a indépendance entre les deux blocs en question. Concrètement, quand on implante le sondage S un peu partout dans le panneau P, les teneurs prises par 2 petits morceaux consécutifs de 5 cm, par exemple, n'ont aucun lien entre elles.

En réalité, c'est rarement le cas. Si la couche présente des concrétions calcaires de 20 centimètres de puissances, deux tronçons de 5 cm appartiennent fréquemment au même nodule, ou au même minerai interconcrétions : ils ont donc, au contraire, des teneurs très liées, très voisines. On peut même dire que pour un sondage de longueur donnée, plus les blocs sont petits (plus le nombre n de ces blocs augmente) plus leur liaison est grande puisqu'ils sont d'autant plus proches. A la limite, si l'on fait tendre n vers l'infini, le premier terme de l'expression (2) de la variance du sondage global s'estompe, et il ne reste que le second. En effet, les covariances du type $\sigma_{z_i z_j}$, où i varie

de 1 à n et j de i + 1 à n sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$. Aussi, quand n devient très grand, leur somme, bien que divisée par $\frac{n^2}{2}$ tend vers une limite finie. Et c'est même cette limite qui est le seul terme qui reste, en définitive, pour caractériser la variance globale.

Nous voilà donc au terme de ce raisonnement, que nous nous excusons auprès du lecteur d'avoir décortiqué si minutieusement, mais il est crucial pour notre objet. Les deux termes de la formule 2 correspondent à deux embranchements complètement différents du calcul statistique. Dans les raisonnements classiques, on suppose en effet que les individus d'un échantillon de taille n sont indépendants les uns des autres, et on néglige donc le 2ème terme : d'où la loi "la variance est inversement proportionnelle à la taille de l'échantillon". Cette hypothèse est vérifiée dans les cas de tirages de boules dans une urne, et tout ce qui peut y être assimilé. Car finalement, dans tous ces modèles, on se moque de la taille matérielle des boules, (ou des individus), ce qui compte c'est le numéro qu'elles portent, leur couleur, ou une caractéristique quelconque : physiquement parlant, l'ensemble des boules est formé de points discontinus et indépendants. De là vient d'ailleurs que le nombre n est, en pratique, obligatoirement fini.

Mais dans le domaine qui nous intéresse, ces hypothèses ne tiennent pas debout. L'espace minéralisé est un milieu continu (l'espace minéralisé et non plus les teneurs, qui peuvent connaître une nette discontinuité au franchissement d'une concrétion calcaire, par exemple). De plus, cet espace, à toutes les échelles de l'observation géologique et minière, est constitué de zones riches et de zones pauvres, c'est-à-dire de régions localement non indépendantes. Revenons donc à la formule 2. On voit que nous sommes

en complète opposition de phase avec les statisticiens classiques. Le seul terme qu'ils retiennent (le 1er) est celui qui devient nul dans un milieu continu (n tend vers l'infini), le seul terme qu'ils négligent est celui qui prend pour nous de l'importance (la moyenne des covariances). Nous voici devant un aiguillage dont les deux voies divergent : d'un côté le calcul statistique classique, d'un autre, nous entrons dans la géostatistique.

3. LES VARIABLES REGIONALISEES

A partir de maintenant, pour bâtir correctement la géostatistique, il convient de tirer des paragraphes précédents les conclusions qui s'imposent et de les classer clairement. Pour l'essentiel les difficultés ont apparu dans l'impact de la géométrie des choses qu'on mesure sur leur estimation statistique. Il faut donc définir une notion simple qui rende compte de cette géométrie. Cette notion est celle de variable régionalisée.

On appellera variable régionalisée toute variable de l'espace définie dans un champ donné pour un support donné.

Donnons quelques exemples de variables régionalisées (en abrégé V.R.)

1°) Dans le panneau P, qui nous a servi jusqu'à présent, le champ est le volume du panneau ; on peut définir une première V.R. de support, un sondage vertical de 6 cm de section, traversant la couche du toit au mur. La variable est parfaitement définie. A chaque point d'implantation de l'axe du sondage, elle prend une valeur bien précise.

2°) Dans le même champ, on peut définir une variable régionalisée ponctuelle, c'est-à-dire concrètement de support un cube d'un cm de côté. C'est une autre variable que la précédente : celle-ci prend ses valeurs dans un espace à 3 dimensions, la précédente était définie dans le plan (on allait du toit au mur).

3°) Une troisième variable, dans le même champ est celle des teneurs des volées, de taille et de forme données.

4°) Les trois variables précédentes parlaient de teneurs, mais on peut aussi définir la puissance sur une verticale (variable ponctuelle dans le champ ramené à 2 dimensions) ou la puissance moyenne d'une volée (de support la base de la volée).

Les quatre exemples précédents ont vu varier le support pour un même champ, le panneau P. Regardons maintenant les problèmes que pose le deuxième caractère et les notions auxquelles il nous conduit.

Le panneau P, dans lequel se déplaçait le sondage, peut lui-même être considéré comme le support d'une autre V.R., sa teneur moyenne par exemple, à condition qu'on définisse un nouveau champ, plus vaste $\mathcal{P}$, dans lequel baigne P. Dès lors, cette remarque nous oblige à préciser ce que nous entendons par variance : en effet, quand on parle de la variance du sondage S, est-il censé se déplacer dans P ou dans $\mathcal{P}$? En creusant ce point, nous allons voir apparaître deux notions, qui éclairciront très bien tous les rapports de sondages à panneaux : l'hypothèse intrinsèque et la notion de variance d'extension.

Nous insistons beaucoup auprès du lecteur pour qu'il possède parfaitement ces deux notions, que leur contenu physique soit pour lui limpide, car

l'effort de compréhension doit donc porter sur elles ; par la suite, nous ne ferons plus que deux choses : utiliser une variance d'extension particulière pour nous raccrocher à l'expérience et, à partir de celle-ci, reconstruire toutes les autres et les exploiter, ce qui n'amènera rien de nouveau quant aux principes de base.

4. L'HYPOTHESE INTRINSEQUE

Donnons nous les deux panneaux P et $\mathcal{P}$ tels qu'ils sont dessinés sur la figure 2 :

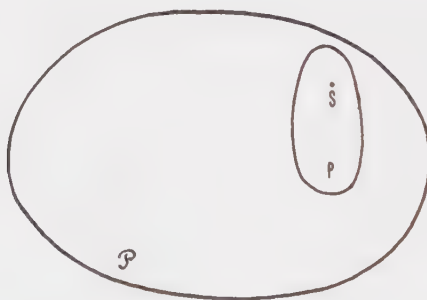


Fig II 2 - Panneaux P et $\mathcal{P}$

On peut définir sans ambiguïté la variance du sondage S dans P. C'est la variance des valeurs que prend sa teneur quand S reçoit toutes les implantations possibles dans P. De la même façon, on peut aussi définir la variance de S dans $\mathcal{P}$, qui n'a aucune raison de coïncider avec la précédente. On notera ces deux variances par $\sigma^2_{S/P}$ et $\sigma^2_{S/\mathcal{P}}$. Mais est-ce que cela a un sens que de parler de la variance de la $S/\mathcal{P}$ teneur moyenne de P

quand il se déplace dans $\mathcal{P}$? Pour peu que P soit assez grand devant $\mathcal{P}$, et de forme différente, on ne voit pas très bien comment s'y prendre. Doit-on imposer à P d'être toujours entièrement contenu dans $\mathcal{P}$, à ce moment là on avantage sans raisons les valeurs centrales de $\mathcal{P}$, qui seront comptées plus souvent que les autres. Doit-on imposer au seul centre de gravité de P d'être dans $\mathcal{P}$, à ce moment là on déborde du champ pour faire intervenir des données extérieures qui n'ont rien à voir avec le paramètre à définir. Il faudrait que $\mathcal{P}$ soit constitué d'un pavage de panneaux analogues à P, ou alors que ce dernier soit ponctuel (comme c'est le cas pour S) pour qu'on arrive à définir sa variance.

Pourtant, il apparait un cas, sur le plan pratique où cette seconde condition est quasi réalisée, celui où S, P et $\mathcal{P}$ appartiennent à 3 échelles technologiques différentes. Le premier est très petit devant les deux autres, et le second devant le troisième. Si P mesure 20 m x 20 m, et $\mathcal{P}$ un quartier de mine entier, les effets de bords décrits à l'instant sont négligeables et l'on peut définir sans ambiguïté les trois variances :

$$\sigma_{S/P}^2 \quad \text{variance de S dans P}$$

$$\sigma_{S/\mathcal{P}}^2 \quad \quad \quad " \quad " \quad S \quad " \quad \mathcal{P}$$

$$\sigma_{P/\mathcal{P}}^2 \quad \quad \quad " \quad " \quad P \quad " \quad \mathcal{P}$$

On peut se demander s'il existe des liens entre ces trois paramètres. Ils ont été recherchés, en effet, et le premier qui les ait mis expérimentalement en évidence est le Sud-Africain D.G. Krige à propos des mines d'or

du Wits Water Rand. Il disposait de supports allant de la taille du sondage à celle de panneaux de 100 km de côté et s'aperçut qu'à tous les niveaux apparaissait la relation :

$$(3) \quad \sigma_{S/P}^2 + \sigma_{P/\mathcal{F}}^2 = \sigma_{S/\mathcal{F}}^2$$

La différence des variances des sondages dans le plus grand panneau diminuée de celle dans le plus petit est égale à la variance du petit panneau dans le grand.

Si l'on écrit la relation de Krige ainsi :

$$\sigma_{S/P}^2 = \sigma_{S/\mathcal{F}}^2 - \sigma_{P/\mathcal{F}}^2$$

On voit qu'aucun des deux termes à droite du signe égal ne dépend de l'implantation particulière de P dans $\mathcal{F}$. Au lieu d'être en haut et à droite de $\mathcal{F}$ comme nous l'avons dessiné, P serait placé en bas et à gauche que ni $\sigma_{S/\mathcal{F}}^2$, ni $\sigma_{P/\mathcal{F}}^2$ n'en seraient modifiés. Par conséquent, si la relation de Krige est vérifiée, $\sigma_{S/P}^2$, ne dépend absolument pas de l'implantation de P dans l'espace. Ni d'ailleurs de la taille de $\mathcal{F}$. On aurait pris un autre panneau $\mathcal{F}'$, englobant le premier et mille fois plus grand que lui qu'on aurait eu encore :

$$\sigma_{S/P}^2 = \sigma_{S/\mathcal{F}}^2 - \sigma_{P/\mathcal{F}}^2 = \sigma_{S/\mathcal{F}'}^2 - \sigma_{P/\mathcal{F}'}^2$$

Par conséquent : où que l'on place le panneau P dans l'espace, ses sondages internes possèdent la même variance. Elle ne dépend pas de la localisation particulière de ce panneau, mais uniquement de sa taille et de sa forme. On dit alors que l'espace minéralisé possède une loi de distribution intrinsèque.

Il faut bien voir que la structure intrinsèque, pour un gisement, est une hypothèse. Elle signifie que le degré de discontinuité de la minéralisation est toujours le même. Or, si l'on regarde un gisement dans son ensemble, cette hypothèse est manifestement erronée. Au delà des frontières minéralisées, il n'y a plus rien, donc plus de discontinuités de teneurs, alors qu'il n'en est pas de même à l'intérieur. Si, par exemple, on songe à l'avancée Sud-Ouest du bassin lorrain, en couche grise (région de Droitaumont, Giraumont, Jarny...) avec son coeur riche et ses bords pauvres, il n'y est pas possible d'y voir quelque chose d'intrinsèque. Mais si dans cette région, on s'intéresse à des panneaux de 100 mètres sur 100 mètres, (qui joueraient le rôle de nos panneaux P), qu'on déplace à travers les zones exploitables, leur structure vérifie cette fois très largement l'hypothèse intrinsèque. En somme, cette hypothèse est l'interprétation, en langage mathématique, des changements d'échelles. Citons un autre exemple, plus visuel, qui réapparaîtra à propos de l'échantillonnage des minerais en place. Si l'on regarde une concrétion calcaire, on voit le type même d'une structure non intrinsèque. Mais si l'on se déplace pendant des centaines de mètres de galerie à observer le parement, ses boules et ses barres dessinent sur la minéralisation, durant des hectares entiers, des figures de même style (style qui varie lui-même mais à une autre échelle, kilométrique). Cette identité de structure est ici la vérification par l'image de l'hypothèse intrinsèque, à l'échelle décamétrique.

Nous la supposerons par la suite régulièrement vérifiée, sauf pour le problème bien particulier de l'estimation des surfaces. Nous allons donc présenter maintenant uniquement la théorie intrinsèque. La majeure partie des résultats de géostatistique sont en réalité bien plus généraux, mais l'exposé que nous suivons est plus simple et cette présentation suffit pour les applications à venir.

5. VARIANCES D'EXTENSION

Au cours de notre exposé, deux difficultés ont apparues, que nous avons rapidement signalées, mais négligées pour pouvoir progresser.

La première a trait au procédé de définition de la variance. On a supposé que le sondage S était implanté en tous les endroits possibles du panneau P et l'on a utilisé la variance de l'ensemble des valeurs correspondantes. Ce paramètre représente-t-il bien l'erreur que l'on commet en estimant P à l'aide de S ? Dans un certain sens non. Très souvent, en pratique minière, les sondages sont implantés de façon préférentielle, par exemple au centre des panneaux. Or, bien que nous sachions que les différents points de l'espace minéralisé ne sont pas indépendants, cette définition de la variance destructure la position du sondage par rapport à son panneau, n'en tient aucun compte.

La deuxième difficulté, que nous avons plus ou moins laissée dans l'ombre, est liée à la taille du support. Hormis le cas où il était tout petit vis à vis du champ, nous avons vu que la variance n'était en général pas définissable. Or, il se peut qu'on cherche, par exemple, à estimer la teneur d'un panneau rectangulaire à partir d'un traçage médian, très bien reconnu. Notre notion de variance ne permet pas d'envisager un tel cas, pourtant courant en pratique.

A l'aide de l'hypothèse intrinsèque, la notion de variance d'extension va nous permettre de lever ces deux difficultés à la fois. Lorsqu'elle est vérifiée, elle entraîne que les caractéristiques statistiques d'un panneau restent en moyenne les mêmes lorsque celui-ci se déplace, par translation, à travers l'espace. Par conséquent, l'erreur $z - z^*$, différence entre la

teneur du panneau P et celle du sondage S qui sert à l'estimer, est aussi une variable régionalisée intrinsèque. Déplaçons à travers l'espace le panneau et son sondage, liés l'un à l'autre. A chaque implantation du centre de gravité du panneau correspond une valeur de sa teneur z et une seule valeur de z^* , puisque le sondage S est fixe par rapport à P. Nous appellerons variance d'extension de z^* à z la variance de l'erreur $z - z^*$, dont chaque valeur numérique est prise lors d'une implantation particulière de l'ensemble lié panneau-sondage. Par hypothèse, cette variance d'extension, mesurée dans une portion ou une autre du gisement (assez grandes toutefois pour qu'on puisse l'estimer statistiquement) reste toujours la même.

Par contre, elle varierait si on la recalculait pour une autre position du sondage dans le panneau. Et l'on conçoit bien, intuitivement, que la variance du sondage lorsqu'il se déplace dans le panneau, telle que nous l'avons définie au préalable, apparaisse comme une moyenne de toutes les variances d'extensions possibles du sondage S dans P. C'est effectivement un résultat que la théorie retrouve, au moins lorsque le concept usuel de variance est définissable. Aussi bien chacune des variances d'extension particulières représente-t-elle beaucoup mieux chaque géométrie particulière de l'ensemble P-S, que leur moyenne indifférentiée.

Voilà donc la première difficulté (possibilité de traduire terme de variance l'aspect structural des choses à estimer) levée. La seconde ne l'est pas moins. Puisque maintenant ce n'est plus le sondage, ou le groupe de sondages, qui se déplacent dans le panneau, mais tout l'ensemble dans l'espace, plus rien ne nous limite dans les géométries mutuelles du panneau et de sa reconnaissance. La même définition exactement s'applique à une reconnaissance par sondages externes à la zone à estimer, ce qui n'aurait pas pu être fait dans

l'optique initiale. Elle s'applique aussi au cas où la reconnaissance n'est plus un point, mais un volume quelconque (groupe de sondages, galeries, zones connues, etc...).

Enfin, l'hypothèse intrinsèque, indirectement, permet de définir une variance d'un panneau P dans un autre $\mathcal{P}$, de taille et de forme quelconque (variance, et non plus variance d'extension). P et $\mathcal{P}$ étant rendus mobiles dans tout le gisement G, supposé infini, on peut parler des variances de P dans G et de $\mathcal{P}$ dans G. Appliquons la loi de Krige à P, $\mathcal{P}$ et G, il vient :

$$\sigma_{P/\mathcal{P}}^2 = \sigma_{P/G}^2 - \sigma_{\mathcal{P}/G}^2$$

On posera, par définition, pour variance de P dans $\mathcal{P}$, la valeur fournie par la relation précédente. Mais cette notion, qui se justifie par souci de cohérence, n'a plus le contenu physique puissant de la variance d'extension, et ne met pas en relief les rapports de P et $\mathcal{P}$.

6. PRINCIPE DU CALCUL DES VARIANCES D'EXTENSION : la fonction intrinsèque

Le concept de variance d'extension est à la fois un tenant et un aboutissant dans le déroulement de la théorie géostatistique. C'est un tenant parce qu'il va permettre d'exprimer de façon quantitative une famille de problèmes d'estimation (tel mode reconnaissance par sondages est-il préférable à tel autre par traçages et prises au fond ; ou bien, quel est le poids à attribuer à chacun des sondages implantés dans un même champ, ...) ;

dans tous ces problèmes, le critère de décision sera le choix du procédé qui correspond à la variance d'extension la plus faible. On les passera en revue, l'un après l'autre, dans les chapitres suivants.

Mais, auparavant, il faut commencer par considérer les variances d'extension comme un aboutissant et nous pour la question : comment, à partir des données expérimentales, se calcule une variance d'extension ? Arrivé à ce stade, le raisonnement se scinde en deux étapes. Il va, premièrement, consister à relier toutes les variances d'extension possibles à l'une d'entre elles, nommée fonction intrinsèque, ou demi variogramme, qui présente l'avantage d'être la plus simple qu'on puisse imaginer : en effet, les deux panneaux P et $\mathcal{P}$ dont on étend la teneur du premier au second, y sont réduits chacun à un point. La seconde étape consiste à déterminer, au vu des données expérimentales, une estimation de cette variance d'extension particulière, lui assigner un modèle mathématique simple, de façon à exprimer numériquement les relations d'accès aux différentes variances d'extension à partir de la fonction intrinsèque. Nous allons donc d'abord traiter des propriétés des variogrammes, des types rencontrés en pratique dans le gisement de fer lorrain et de leur signification physique, puis du calcul proprement dit des variances d'extension usuelles. On ne traitera pas, dans ce chapitre réservé à la partie de calcul des probabilités de la géostatistique, de l'estimation du variogramme à partir des données expérimentales. Ce problème statistique, du reste techniquement très simple, sera abordé au chapitre suivant.

7. PROPRIETES ET SIGNIFICATION DE LA FONCTION INTRINSEQUE

7.1. La fonction intrinsèque

Le variogramme est la variance des accroissements de la variable régionalisée. Celle-ci prend au point x la valeur $f(x)$ et au point $x + h$ la valeur $f(x + h)$. Le variogramme a donc pour expression :

$$E \left[f(x + h) - f(x) \right]^2$$

où x se déplace de façon à occuper tous les points possibles de la régionalisation intrinsèque, h restant fixe en module et en direction.

Expérimentalement, on porte en abscisse les distances h , et en ordonnées la valeur moyenne du carré de la différence des teneurs des échantillons prélevés à la distance h l'un de l'autre. Aussi, pour "lire" une courbe de variogramme et comprendre sa signification physique, l'on ne doit pas perdre de vue que l'axe des x ne représente pas les distances comptées à partir d'une origine dans l'espace, mais des accroissements des coordonnées prises entre deux points, d'origine et d'extrémité mobiles. Quant à l'axe y , il représente une variance, c'est-à-dire une quantité de dispersion.

La fonction intrinsèque, notée par la lettre γ , est le demi variogramme, c'est-à-dire que :

$$(4) \quad \gamma(h) = \frac{1}{2} E \left[f(x + h) - f(x) \right]^2$$

Mathématiquement, cette fonction possède les propriétés suivantes : elle est paire, non négative et ne s'annule que pour $h = 0$

$$\gamma(h) = \gamma(-h) \geq 0 \text{ et } \gamma(0) = 0$$

De plus, pour qu'une fonction mathématique quelconque puisse jouer le rôle de fonction intrinsèque, il faut et il suffit que :

$$\gamma(h+\zeta) + \gamma(h-\zeta) - 2\gamma(h)$$

ait une transformée de Fourier positive et sommable relativement à h , quel que soit ζ ($\gamma(h)$ doit être positif de type conditionnel). Cette exigence traduit simplement le fait que toutes les variances d'extension bâties à partir d'un $\gamma(h)$ doivent être positives. Nous verrons, un peu plus loin dans le chapitre, à titre d'illustration, un contre exemple de cette particularité.

7.2. Comportement du $\gamma(h)$ à l'origine

Le comportement à l'origine du $\gamma(h)$ est en relation étroite avec les propriétés de régularité et de continuité de la régionalisation.

On peut, en gros, classer les fonctions intrinsèques en quatre types, selon leur comportement à l'origine. (Fig. 3).



Figure II-3: Types de fonctions intrinsèques.

Les variables à haute continuité, telles que les puissances, seront caractérisées par des fonctions intrinsèques de comportement parabolique à l'origine (type 1).

Le deuxième type, caractérisé par une tangente oblique à l'origine représente des régionalisations qui ne possèdent que la continuité "en moyenne".

Telles sont très souvent en Lorraine les accumulations de métal, ou les teneurs en fer des couches argileuses.

Le troisième type se manifeste par une tangente verticale à l'origine. En effet, bien que $\gamma(0) = 0$, il n'est pas obligatoire, lorsque $h \rightarrow 0$ que $\gamma(h) \rightarrow 0$. Lorsque l'on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = C_0 > 0$$

on dit qu'il y a un effet de pépite à l'origine. La constante positive C_0 s'appelle constante de pépite. En fait, dans une très petite zone au voisinage de l'origine la croissance de $\gamma(h)$ est très rapide sans être réellement discontinue. Dans le gisement lorrain, les variogrammes des teneurs en fer des couches entrecroisées présentent tous un effet de pépite, dû à la migration des carbonates qui a mis en place des nodules de calcite et de sidérose. Ces concrétions, de quelques dizaines de centimètres, apparaissent sur les variogrammes hectométriques comme de véritables discontinuités.

Enfin, le dernier type est un cas limite, celui des variables purement aléatoires. La variance des accroissements de la variable régionalisée est indépendante de la distance séparant les deux points de l'accroissement. Les variables aléatoires apparaissent comme le cas extrême des variables régionalisées avec effet de pépite. Ici, comme dans le type précédent, on ne peut certes imaginer de variable concrète que possédant un $\gamma(h)$ avec une transition entre l'origine et le palier. Cette transition semblera parfois expérimentalement très rapide, ou au contraire ménagée selon l'échelle à laquelle on la regardera.

On voit donc, à travers la description de ces quatre types la signification concrète de la fonction intrinsèque. Entre les deux extrêmes des fonctions continues, au sens mathématique du terme, d'une part, et des répartitions purement aléatoires d'autre part, se dessine toute une gradation du désordre, de la discontinuité, des régionalisations. Cet éventail des degrés de discontinuité des structures est représenté de façon synthétique par la fonction $\gamma(h)$. Se plaçant d'un point de vue minier, on peut dire aussi qu'elle donne un contenu précis à la notion très intuitive et usuelle dans l'industrie minière, de zone d'influence d'un échantillon. La croissance plus ou moins rapide du demi-variogramme $\gamma(h)$, lorsque $|h|$ augmente représente exactement la manière plus ou moins rapide dont se détériore l'influence d'un échantillon donné sur des zones de plus en plus lointaines du gisement.

7.3. Comportement du $\gamma(h)$ à l'infini - Phénomènes de transition

Aux grandes distances, la fonction $\gamma(h)$ peut fort bien croître indéfiniment. Cela se produit, entre autres, dans les gisements métalliques dits de type "de Wisjien", représentés par des variogrammes logarithmiques. Mais il arrive, plus fréquemment encore, qu'au delà d'une certaine distance, les échantillons soient trop éloignés les uns des autres pour manifester des corrélations. Celles-ci s'estompent et disparaissent avec l'éloignement. Les régionalisations de ce type sont dites "phénomènes de transition", et sont caractérisées par des variogrammes dont la croissance tend vers un palier, effectivement atteint ou non. L'effet de pépité, vue de très près, est d'ailleurs lui aussi un phénomène de transition. Le variogramme est égal, ou pratiquement

égal, à sa valeur asymptotique, à partir d'une abaisse appelée "portée".
(Fig. 4). (La portée peut être infinie).

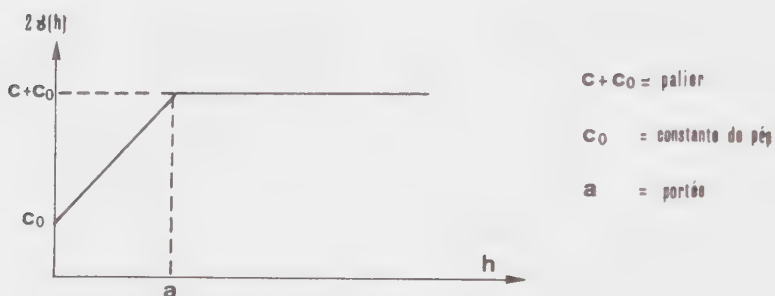


Fig.II 4 - Variogramme d'un phénomène de transition

Toutes les régionalisations du gisement lorrain sont des phénomènes de transition. Nous ne ferons donc porter l'étude théorique que sur ce type de fonctions intrinsèques ; étant donné d'ailleurs le degré de généralité de ces phénomènes, cette restriction apparente n'en est pas une, et les résultats établis ici sont immédiatement transposables à un bon nombre de gisements.

7.4. Anisotropies de la fonction intrinsèque

Dans les applications, on cherchera toujours à se ramener au cas d'une fonction intrinsèque isotrope, c'est-à-dire de la forme :

$$\gamma(h) = \gamma(r)$$

$$r = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots} = |h|$$

Or, les anisotropies constatées sur les variogrammes expérimentaux

sont souvent trop importantes pour pouvoir être négligées. Aussi les ramènera-t-on en pratique à deux modèles simples : l'anisotropie géométrique et l'anisotropie zonale.

7.4.1. Anisotropie géométrique

Nous la rencontrerons fréquemment dans les différentes orientations horizontales à l'intérieur d'une même couche minéralisée.

Elle se caractérise par un $\gamma(h)$ de la forme (Q) , où Q est une forme quadratique

$$Q = \sum a_i a_j h_i h_j$$

relativement aux composantes du vecteur h . Il suffit d'effectuer une transformation linéaire sur les coordonnées pour se ramener au cas isotrope $Q = r^2$. En général, les directions principales de Q seront connues directement, car elles correspondront à des directions préférentielles du phénomène lui-même, de sorte que la transformation linéaire se réduira à remplacer h_1, h_2, h_3 par $(\lambda_1 h_1, \lambda_2 h_2, \lambda_3 h_3)$ avec des constantes λ , ou modules d'affinité, convenablement choisies.

7.4.2. Anisotropie zonale

L'empilement des couches et intercalaires est l'exemple type de l'anisotropie zonale de la direction verticale par rapport aux autres.

Dans ce cas $\gamma(h)$ ne dépend pas réellement des n composantes du

vecteur h , mais seulement d'une ou deux d'entre elles. Par exemple, à 3 dimensions, on peut avoir une fonction de la forme $\gamma(h_3)$ ne dépendant que de la composante verticale h_3 de h . Avec une telle fonction, un accroissement $f(x+h) - f(x)$ a une variance nulle si $h = (h_1, h_2, 0)$ est un vecteur horizontal. Autrement dit, la variable régionalisée $f(x)$ reste constante dans un même plan horizontal, et le phénomène a une allure rubannée.

En Lorraine un tel type d'anisotropie se manifeste parfois aussi même dans les plans horizontaux. C'est sensiblement le cas aux deux avancées ouest du gisement dans le bassin de l'Orne et de Landres-Ottange. La variable $f(x)$ reste alors presque constante le long des droites parallèles au premier axe des coordonnées (ici l'axe N.E - S.W).

En pratique, naturellement, $f(x)$ ne reste jamais rigoureusement constante dans des plans ou sur des droites parallèles, mais manifeste seulement une tendance à varier beaucoup moins le long de ces plans ou de ces droites préférentiels que dans les autres directions. On est conduit à décomposer le $\gamma(h)$ en deux termes, l'un isotrope et l'autre zonal :

$$\gamma(h) = \gamma_1(r) + \gamma_2(h_3)$$

$$\gamma(h) = \gamma_1(r) + \gamma_2(h_2, h_3)$$

ce qui revient à superposer deux régionalisations indépendantes, l'une isotrope, l'autre présentant un rubannement ou un run parfait. Dans un très grand nombre de problèmes, et notamment dans le calcul des variances d'estimation, ces deux composantes agissent séparément et leurs effets peuvent être ajoutés purement et simplement.

7.5. Superposition des régionalisations

Lorsque deux ou plusieurs régionalisations d'échelles différentes se superposent, comme c'est la règle dans les phénomènes de transition miniers, le variogramme de la régionalisation somme est évidemment la somme des variogrammes des régionalisations élémentaires. Ce qui vient d'être dit à propos des runs s'applique donc à nouveau, et dans bien des problèmes le découpage en régionalisations élémentaires simplifie l'approche géostatistique. L'effet de pépite apparaît dans cette optique comme la schématisation de toutes les régionalisations de portée petite à l'échelle de l'observation, il nous servira constamment par la suite comme première approximation (en général très suffisante) de la superposition de régionalisations. Avec la même approximation les régionalisations de portée grande par rapport à l'échelle d'observation peuvent être négligées, ce qui ramène l'étude des superpositions de phénomènes de transition d'échelles différentes à l'étude de l'effet de pépite.

8. CALCUL DES VARIANCES ET VARIANCES D'EXTENSION

8.1. Variance du panneau P dans le panneau $\mathcal{P}$

Appelons V et $\mathcal{V}$ les dimensions (surfaces ou volumes) des panneaux P et $\mathcal{P}$. La teneur z de P , dont le centre est implanté en x , est :

$$z = \frac{1}{V} \int_V f(x+h) dh$$

la teneur m , moyenne du grand panneau est :

$$m = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} f(x) dx$$

Si P est petit devant $\mathcal{V}$, les effets de bords sont négligeables et l'on peut écrire l'expression de la variance de P dans $\mathcal{V}$, soit :

$$\sigma_{P/\mathcal{V}}^2 = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} (z - m)^2 dx$$

Compte tenu de cette expression, et de la définition (II, 4) de la fonction intrinsèque, on déduit, en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$(II, 5) \quad \sigma_{P/\mathcal{V}}^2 = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{V} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx'$$

La signification physique de chacune de ces intégrales est claire : elles représentent la valeur moyenne dans $\mathcal{V}$ (ou dans V), du $\gamma(h)$ lorsque les deux extrémités x et x' du vecteur h balayent, chacune pour son compte, le volume $\mathcal{V}$ (ou V).

Pour alléger les écritures, on posera dorénavant :

$$(II, 6) \quad F(V) = \frac{1}{V} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx'$$

Compte tenu du résultat précédent (II, 5), $F(V)$ représente exactement la variance d'un point dans le volume V . On a donc :

$$\sigma_{P/\mathcal{V}}^2 = \sigma_{0/\mathcal{V}}^2 - \sigma_{0/P}^2$$

Ce qui est la formule de Krige.

Un cas particulier intéressant est celui où le panneau $\mathcal{P}$ croft indéfiniment. Si le variogramme n'est pas borné, $F(\mathcal{V})$ est alors elle aussi une fonction qui tend vers l'infini ; par contre, dans les phénomènes de transition, où la fonction intrinsèque est égale, à partir d'une certaine distance à la constante C , la formule II, 6 montre alors que pour $\mathcal{V} \rightarrow 00$, on a :

$$F(\mathcal{V}) \rightarrow C$$

Ainsi, l'ordonnée du palier de la fonction intrinsèque C est égale à la variance d'un point dans tout le champ, illimité, de la régionalisation intrinsèque. On appellera C la variance à priori, ou variance ponctuelle du phénomène de transition.

8.2. Covariances de P et P' dans $\mathcal{P}$

Introduisons, parallèlement à la notion de variance dans un champ $\mathcal{V}$, celle de la covariance des deux panneaux P et P' de volumes V et V' , de teneur z et z' . Il s'agit, par définition, de

$$\sigma_{P, P' / \mathcal{P}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} (z - m)(z' - m) dx$$

Elle se calcule à partir de la fonction intrinsèque de la même façon que pour les variances, il vient :

$$(II, 7) \quad \sigma_{P, P' / \mathcal{P}} = F(\mathcal{V}) - \frac{1}{V \cdot V'} \int_V \int_{V'} dx \gamma(x - x')$$

Dans le second terme, les deux extrémités x et x' du vecteur h balayent respectivement le volume V et le volume V' .

8.3. Variance d'extension de P à P'

Le calcul des variances d'extension devient maintenant très simple. Il s'agit, rappelons le, d'exprimer la variance de l'erreur $z - z'$, commise en attribuant la teneur du panneau au panneau P' , lorsque le groupe de ces deux panneaux se déplace par translation à travers le champ infini de la régionalisation intrinsèque.

Donnons nous un champ quelconque $\mathcal{P}$, dans lequel est plongé l'ensemble $P + P'$, et qu'on fera croître indéfiniment. La variance d'extension σ_E^2 , est égale à :

$$\sigma_E^2 = \sigma_{P/\mathcal{P}}^2 + \sigma_{P'/\mathcal{P}}^2 - 2 \sigma_{P, P'/\mathcal{P}}$$

Les expressions des deux variances et la covariance qui apparaissent nous sont fournies par les formules (II, 5) et (II, 7), d'où :

$$(II, 8) \quad \sigma_E^2 = \frac{2}{V \cdot V'} \int_V \int_{V'} \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{V'^2} \int_{V'} \int_{V'} \gamma(x - x') dx dx'$$

Comme il fallait s'y attendre, on s'aperçoit que le champ arbitraire s'élimine dans l'expression (II, 8) ; autrement dit. la variance d'extension de P à P' est elle aussi une quantité intrinsèque, qui ne dépend que de la géométrie de l'ensemble PP' (domaines d'intégrations des trois intégrales) et bien entendu de cette variance d'extension de base qu'est la fonction intrinsèque (facteur intégrant).

La formule (II, 8) fournit donc complètement, sur le plan théorique, la solution des problèmes d'estimation minière. Il ne s'agit plus maintenant

que de déterminer des modèles mathématiques de variogrammes, et de préciser la forme des panneaux P et P'.

En pratique, l'un des deux ensembles, disons P', sera le plus souvent constitué de N sondages ponctuels, l'autre P étant matériellement le panneau à estimer, (II, 8) prend alors la forme suivante :

$$(II, 9) \quad \sigma_E^2 = 2 \sum_{i=1}^N \int_V \gamma(x - x_i) dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma(x_i - x_j)$$

Pour concrétiser un peu mieux cette notion cruciale, nous donnons un exemple très simple, dans les études pratiques, celui de la variance d'extension d'un sondage central, puis des deux sondages extrêmes, au tronçon de galerie qui les supporte.

9. FORMULES AUXILIAIRES

La technologie du calcul géostatistique fait intervenir continuellement certaines fonctions et certaines formules que nous allons présenter maintenant.

9.1. Formules de la montée

Dans le gisement lorrain, les couches minéralisées ont, évidemment, trois dimensions. Cependant, en pratique, la puissance joue un rôle à part, et les teneurs des échantillons sont définies du toit au mur. Les plans miniers reproduisent donc des couches sommées suivant verticale, réduites à deux dimensions, et où chaque sondage apparaît sous forme d'un point. Les teneurs de ces sondages sont donc des V.R. ponctuelles d'une régionalisation à deux dimensions.

D'autre part, il existe bien une teneur ponctuelle, c'est-à-dire d'un tout petit prélèvement, un petit cube de quelques cm^3 en chaque point du gisement. On voit là une deuxième V. R., ponctuelle aussi, mais à trois dimensions, dont la précédente dérive d'ailleurs par l'opération technologique de prise du sondage du toit au mur.

Cette opération, qui permet le passage d'une V. R. à une autre quand le support varie dans un même champ porte le nom de montée intrinsèque. De plus, nous dirons qu'elle est droite quand le sondage est perpendiculaire au plan de la couche, et définie sous puissance constante, quand la puissance de la couche peut, effectivement, être assimilée à une constante dans la région étudiée.

On montre que, si $\gamma_n(x)$ est la fonction intrinsèque de la variable à n dimension ($n = 2, 3, \dots$), la fonction intrinsèque γ_{n-1} de la variable transformée par une montée droite de puissance ℓ est :

$$(II, 13) \quad \gamma_{n-1}(r) = \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell - x) \gamma_n(\sqrt{x^2 + r^2}) dx - \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell - x) \gamma_n(x) dx$$

On peut, évidemment, réitérer l'opération de montée, et considérer la teneur moyenne d'une galerie comme une nouvelle variable régionalisée, il suffit d'appliquer (II, 13) à la montée d'ordre 1.

9.2. Fonctions F et X des rectangles et des parallélépipèdes

Le plus souvent en pratique on assimilera les panneaux miniers à des rectangles (ou à des parallélogrammes équivalents aux rectangles) ou à des parallélépipèdes rectangles. Nous donnerons plus loin le formulaire des

variances d'extension de base pour ces figures. On y utilise en permanence les deux fonctions auxiliaires $X(h)$ et $F(h)$ définies à une dimension par :

$$\text{II, 14)} \quad \left\{ \begin{array}{l} X(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx \\ F(h) = \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^h \gamma(x-y) dx dy = \frac{2}{h^2} \int_0^h x X(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma(x) dx \end{array} \right.$$

Nous avons déjà rencontré ces deux fonctions dans l'exemple A. $X(h)$ donne la valeur moyenne de $\gamma(x)$ lorsque x représente la distance entre un point courant d'un segment de longueur h et l'une de ses extrémités fixes.

La fonction $F(h)$ représente la valeur moyenne de $\gamma(x)$ lorsque x est la distance de deux points courants, décrivant indépendamment le segment de longueur h .

En composant la formule de la montée (II, 13) et les fonctions auxiliaires (II, 14), nous pouvons, par étapes successives, bâtir tout l'arsenal de base de la géostatistique, qui se présente alors comme un vaste jeu de constructions très commode. Nous verrons dans les chapitres suivants comment ces formules se calculent, formellement, ou numériquement, dans les cas qui nous préoccupent. Nous donnons dans la troisième partie les liaisons mutuelles et l'interprétation géométrique. Pour la commodité de l'exposé, on condensera un peu les indices, et l'on n'indiquera ni le nombre de dimensions de l'espace, ni l'ordre de la montée. On désignera simplement par :

$\gamma(x) = \gamma_n(x)$ la fonction de dispersion de la variable ponctuelle et par $F(a)$, $F(a, b)$, $F(a, b, c)$ la valeur moyenne de $\gamma(x)$ quand l'origine

et l'extrémité du vecteur x parcourent indépendamment soit le segment a , soit le rectangle a, b , soit le parallélépipède a, b, c . A une constante près égale au $\chi_{n-K}(0)$, avec $k = 0, 1$ ou 2 , ces fonctions F sont celles définies à une dimension par (II, 14).

10. LES DEUX VISAGES DE LA THEORIE DES VARIABLES REGIONALISEES

Voilà donc, exposée de façon bien plus intuitive que rigoureuse, une partie de la théorie des variables régionalisées, la théorie intrinsèque. Elle a été développée en vue des applications minières. Pourtant, au cours de la présentation a apparu, lorsque nous avons voulu donner une signification physique au variogramme, que cet outil mathématique décrivait des structures de l'espace. Leur style plus ou moins déchiqueté se traduisait sur son comportement à l'origine, leurs directions préférentielles par ses anisotropies, leurs niveaux d'hétérogénéité par ses effets de pépite. On voit donc se dessiner un autre centre d'intérêt que l'estimation minière, à savoir la description géologique en soi, à l'aide d'une morphologie mathématique.

Dans une étude sur les phénomènes de transition, il serait regrettable de ne pas chercher à pousser plus loin l'interprétation des variogrammes à palier, qui caractérisent ces phénomènes, et cela d'autant plus que le gisement lorrain apparaît à l'expérience comme un exemple type d'une gigantesque accumulation de phénomènes de transition. Nous allons donc, en vis à vis de ce chapitre, mus par une arrière pensée minière, nous laisser guider au prochain chapitre par la recherche géologique pour présenter ce deuxième visage de l'étude des phénomènes de transition.

Ce prochain chapitre va apparaître à la fois comme plus expérimental et plus théorique que celui qui s'achève. Plus expérimental, puisqu'on y manipulera effectivement des données géologiques, et plus théorique puisqu'on cherchera à bâtir des interprétations à partir des variogrammes, alors qu'ici il suffisait de résumer une théorie déjà au point.

11. LA MATRICE DE CODISPERSION INTRINSEQUE

A la base de notre démarche géologique intervient donc l'utilisation de la fonction intrinsèque. Mais elle sera entendue sous une forme un peu élargie.

En effet, dans le champ de la régionalisation, plusieurs variables coexistent simultanément. La puissance et la teneur en un point par exemple, ou bien les différentes teneurs chimiques (Fer, Chaux, Silice, ...) d'un prélèvement, ou le type de faciès rencontré et une porosité, ou un indice de dureté quelconque. Il faut donc généraliser la notion de fonction intrinsèque, qui ne permet de décrire les corrélations que d'un paramètre vis à vis de lui-même à travers l'espace, en un concept relatif à l'ensemble des paramètres qu'on décide d'étudier. Cette notion est la matrice de codispersion intrinsèque.

En chaque point x de l'espace, on définit les variables régionalisées $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)$. La loi de codispersion intrinsèque entre les deux variables i et j est alors :

$$(II, 42) \quad \gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E \left[f_i(x+h) - f_i(x) \right] \left[f_j(x+h) - f_j(x) \right]$$

quand $i = j$, on retrouve bien la fonction intrinsèque de la variable $f_i(x)$.
On montre que nécessairement

$$|\gamma_{ij}(h)| \leq \sqrt{\gamma_i(h) \cdot \gamma_j(h)}$$

ce qui permet de définir un coefficient de codispersion $R_{ij}(h)$

$$R_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_i(h) \cdot \gamma_j(h)}}$$

nécessairement compris entre - 1 et + 1, et qui n'est pas autre chose que le coefficient de corrélation des accroissements $f_i(x+h) - f_i(x)$ et $f_j(x+h) - f_j(x)$. R_{ij} présente le caractère intrinsèque, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du champ V dans lequel on étudie la corégionalisation.

L'ensemble des $\gamma_{ij}(h)$, disposé sous forme d'un tableau matriciel constitue la matrice de codispersion $\Gamma_{ij}(h)$. Elle sera le paramètre d'étude de base dans l'analyse géologique du chapitre suivant. (On utilisera, en outre, une seule fois un covariogramme transitif qu'on présentera le moment venu).

CHAPITRE III

PRESENTATION GEOLOGIQUE DU GISEMENT

DE FER LORRAIN

SOMMAIRE

Après avoir situé le gisement lorrain aux paragraphes 1 et 2, on précise le cadre minéralogique et pétrographique qui servira de base aux définitions des couches et ensembles homogènes (par. 3 et 4). L'étude de l'extension verticale de ces couches, qui relève de l'analyse séquentielle est rapidement résumée ensuite (par. 5).

A partir du paragraphe 6, l'accent est porté davantage sur l'aspect régionalisé de la minéralisation. On indique au paragraphe 7 comment se présente la première structure importante sur le plan minier, celle des concrétionnements d'échelle métrique, puis on raccorde cette structure aux transitions hectométriques (par. 8), pour aboutir au paragraphe 9 aux transitions de très vastes portées, d'ord de plusieurs kilomètres. Le dernier paragraphe (10) refond en une synthèse globale la superposition de ces structures décrites à partir de supports miniers à des fins minières.

1. INTRODUCTION

Une présentation n'est pas une étude. Ainsi, cette présentation géologique n'a pas pour but de montrer où et comment se répartissent les différentes variables géologiques analysables, ni encore moins pourquoi elles se sont réparties au cours des temps comme on les voit aujourd'hui.

Son objectif est beaucoup plus simple et ne vise qu'à définir le cadre dans lequel se poseront les problèmes géostatistiques. Certes, tout le monde sait qu'en géologie, il y a derrière presque tous les termes, une ou plusieurs hypothèses génétiques sous-jacentes. Nous en parlerons au passage, mais sans les étayer, fixant toute notre attention sur le caractère descriptif des paramètres que les géologues proposent. Ces paramètres ont longuement été mis au point et il a fallu plusieurs générations d'hommes pour aboutir à ce qu'ils sont aujourd'hui. Dans l'absolu, ces outils peuvent paraître limités. Mais qu'ils soient actuels et puissent se référer à des expérimentations très sérieuses, nous suffira pour les admettre sans discussion.

2. SITUATION DU GISEMENT

La formation ferrifère de Lorraine est d'origine sédimentaire marine et sa mise en place définitive remonte à la fin du jurassique inférieur, au Toarcien. En tant que gisement, elle constitue un ensemble de couches de faible pendage (3 %) à des profondeurs variant de 0 à 300 m, de puissance

comprise entre deux et sept mètres ; ces couches sont séparées par des intercalaires calcaires ou argileux. La puissance totale de la formation fluctue autour d'une moyenne de 40 mètres et la surface du gisement, arrêtée à la puissance minimale de 2 mètres, est 600 km². Exploité depuis 100 ans, cet ensemble a déjà produit 2,2 milliards de tonnes et l'ordre de grandeur de ses réserves est de 6 milliards de tonnes. Une cinquantaine de sièges d'extraction, de capacité annuelle de 100 000 à 3 millions de tonnes, se partagent l'exploitation du gisement. La méthode d'exploitation à peu près universelle (exception faite d'une ou deux exploitations en découverte) est celle des chambres et piliers avec foudroyage du toit. Dans les quartiers, le réseau des prélèvements au fond est commandé par l'implantation des traçages, aussi les prises sont-elle souvent disposées de façon pseudo-régulière à une centaine de mètres les unes des autres.

3. CADRE MINERALOGIQUE ET PETROGRAPHIQUE

Quelle est la nature géologique du minéral et de son contexte encaissant ? De nombreuses études ont porté sur cette question et l'ont abordé sous ses aspects les plus divers. Nous ne reprendrons pas cet historique et renvoyons les lecteurs qu'il intéresse à la dernière étude en date, qui, comme il se doit, reprend et situe toutes les précédentes par rapport à elle. Ces travaux, dus à L. BUBENICEK, nous sont indispensables tout d'abord pour caractériser les types de minerais et leur mode de succession verticale ou horizontale.

3.1. Minéralogie

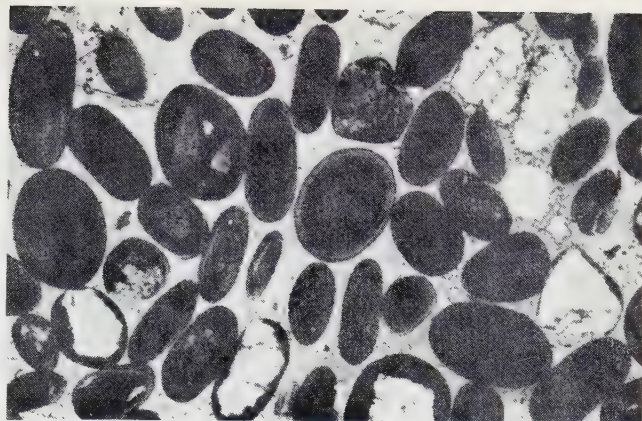
A la suite d'un travail de dépouillement remarquable, cet auteur a montré que l'essentiel des minerais exploités, voire des intercalaires, était constitué de 6 phases minéralogiques, de composition moyenne constante, ou peu variable (ciment argileux, chlorite). Ces phases sont définies comme les plus petits éléments séparables par les procédés de concentration et d'enrichissement usuels, procédés de laboratoire ou industriels. Elles sont semblables à des minéraux purs, et dans la mesure, souvent vérifiée, où leur composition chimique est constante, jouent exactement le même rôle dans toute transformation ultérieure du minerai. Pourquoi parler de phases plutôt que de minéraux ? La raison provient essentiellement de la nature détritique du minerai, qui a assemblé de façon complexe des produits purs, même aux échelles submicroniques, alors que parallèlement, l'absence de métamorphisme évitait des recristallisations ou transformations massives de la roche. L'étape diagénétique, dont nous reparlerons a, pour sa part, apporté des phases nouvelles (sidérose et chlorite) et déplacé légèrement les constituants mais sans introduire de bouleversement minéralogique majeur. Les trois photographies des figures 2, 3 et 4 donnent des exemples de ces phases en place, dont nous indiquons ci-après l'analyse chimique moyenne :

Figure 2

Arénite non argileuse oxydée

Les oolithes brunes sont enchâssées dans un ciment (gris clair) de calcite.

Les grains de quartz apparaissent en blanc.



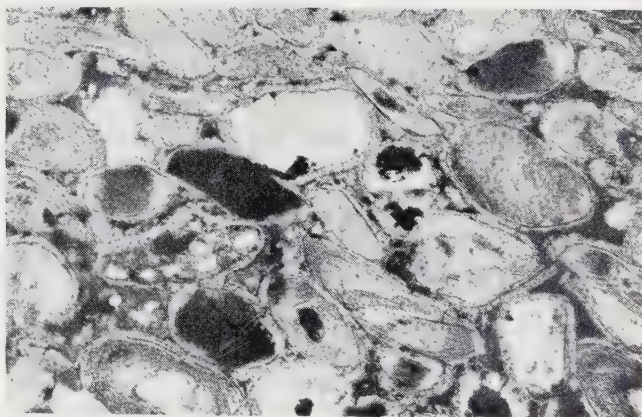
G = 50

Figure 3

Arénite non argileuse réduite

Les oolithes et le ciment sont transformés en chlorite (grise sur cliché).

Il reste quelques noyaux de limonite.

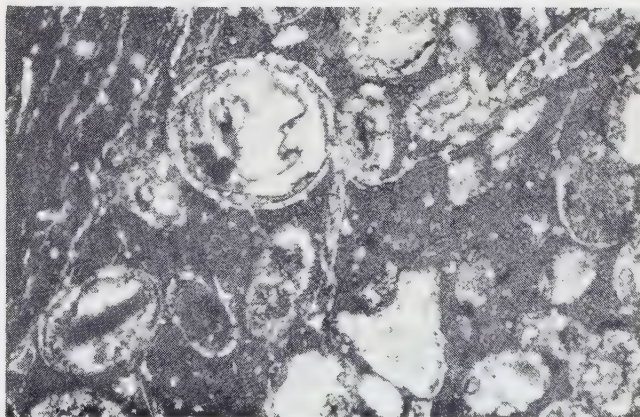


G = 50

Figure 4

Arénite argileuse réduite

Le ciment argileux gris foncé, avec de petits grains de quartz, entoure les oolithes et les gros quartz.



G = 50

Tableau III - 1 : Déterminant de BUBENICEK

	limonite	calcite	quartz	sidérose	chlorite	ciment argileux
Fer	0,520	0,008	0,025	0,377	0,319	0,190
Chaux	0,005	0,527	0,010	0,053	0,018	0,000
Silice	0,040	0,003	0,900	0,000	0,291	0,400
Fer ferreux	0,040	0,000	0,000	0,377	0,186	0,165
Alumine	0,060	0,004	0,015	0,000	0,099	0,165
H ₂ O	0,115	0,000	0,000	0,000	0,109	0,087
CO ₂	0,000	0,440	0,000	0,394	0,000	0,000

Les chiffres représentent les teneurs chimiques exprimées en pourcentages à partir des phases sèches (par H₂O, il faut donc entendre eau de constitution), le minerai en place, poreux, est humide.

3.2. Paragénèses

Du point de vue génétique, ces phases sont le résultat d'un apport de constituants détritiques, plus ou moins transformés ou déplacés par la suite. La calcite est d'origine purement marine et provient de tests et de débris de la faune lors du dépôt. Cette calcite assez souvent a recristallisé sous forme de nodules calcaires. Les grains de quartz, entièrement détritiques eux aussi,

ont été apportés dans le bassin par des rivières. Le matériel fin argileux et le fer, ce sernier sédimentant sous forme d'oolithes détritiques (et non chimiques) sont eux aussi d'origine continentale. Le troisième type d'apport sédimentaire est le matériel organique, dû soit à l'action des organismes sur le milieu par leur activité vitale, soit à l'action de leurs restes, après leur mort. Ces deux actions se caractérisent chimiquement par la production de molécules organiques, très réductrices et très destructibles. Aussi, ne peut-on pas voir ces molécules elles-mêmes aujourd'hui, mais uniquement le résultat de leur action sur les constituants déposés, tout particulièrement sur le fer ferrique des oolithes. Cette action a déplacé vers la droite l'équilibre suivant :



(les quatre termes doivent être entendus au sens des phases).

A la lumière de cette loi, on peut regrouper les phases en paragenèses dépendant de deux facteurs : le type d'apport et le degré d'évolution ultérieure.

L'apport le plus simple est constitué des trois phases détritiques : limonite, quartz et calcite, auxquelles s'ajoute une proportion allant de 0 à 100 % d'argile (ceci est valable non seulement pour les minerais mais pour toutes les roches de la formation).

Se superposant à cet apport, l'équilibre de l'équation (III, 2) crée deux nouvelles phases, la sidérose et la chlorite. En réalité, (III, 2) est une moyenne empirique des premiers équilibres d'une famille de réactions

de réduction qui à partir de la limonite et du quartz, aboutissent à la magnétite, l'hématite et la sidérose (L. BUBENICEK : les paragenèses des minerais lorrains). Cette première transformation du minerai, qui n'est pas encore du métamorphisme s'appelle diagenèse.

Au cours de la diagenèse ont lieu aussi d'autres transformations physiques dues, sous l'influence de la pression et du CO_2 dissous, à la mise en solution des carbonates calcite et sidérose, et à leur recristallisation sous forme de ségrégations massives.

3.3. Pétrographie

Observons ces différentes phases au microscope, ou sur les photographies 2, 3 et 4 : on y distingue des grains enchassés dans des ciments.

Du point de vue détritique, les seuls termes lithologiques qui renferment des minerais sont des arénites, ou des roches mixtes d'arénites et de lutite. On dira "arénites non argileuses et arénites argileuses".

Décrivons l'aspect détritique de la pétrographie à partir de la paragenèse oxydée, plus simple, car elle n'a pas subi les transformations réductrices décrites plus haut. Dans ces minerais, les grains sont de trois types : oolithes de limonite, grains de quartz et débris de coquilles calcaires. Les oolithes sont des ellipsoïdes plus ou moins aplatis, de dimensions variant de 150 à 300 microns, les quartz de forme plus quelconque ont une taille variable autour de 150 microns et les débris de coquilles, allongés, ont leur petite dimension voisine de celle des quartz et l'autre 3 à 6 fois plus grande.

Si la paragenèse ne contient pas d'argile, le ciment est formé de limonite fine et de calcite recristallisée. Si la phase argile existe, elle se comporte sur le plan pétrographique comme un ciment de lutites formé de fines particules microscopiques dont les constituants de base sont le quartz, les débris carbonatés, des petits grains d'oxydes de fer. Les seuls minéraux des argiles identifiés sont l'illite, la kaolinite et accessoirement la muscovite (DEUDON, 1958, ROUBY, 1960).

Venons en aux paragenèses réduites, encore appelées paragenèses chloriteuses (photographie n° 3). La réduction attaque les termes pétrographiques précédents.

La chlorite apparait au contact de la limonite, donc autour des oolithes (chlorite pelliculaire) et à la place de la limonite fine du ciment. Le ciment est très vite entièrement chloriteux dans les zones décalcifiées et chloriteux et calcaire dans les concrétions de calcite. A la limite, les oolithes sont complètement envahies de chlorite et subissent des déformations plastiques les transformant en spastolithes.

La sidérose apparait comme élément corrosif du quartz, et s'y développe en cristaux parasites en grains de riz. Quand la quantité de sidérose a franchi un certain seuil, elle migre sous forme de nodules du style des concrétions calcaires. Ces nodules sont parfois très compacts.

Voilà, résumés très sommairement, les critères de définition et de classement des phases et constituants pétrographiques principaux pour roches minéralisées de la formation ferrifère.

4. CHAMPS ET SUPPORTS

4.1. Définition

La donnée d'une variable régionalisée nécessite qu'on fixe son champ et son support.

C'est à la géologie qu'il faut demander de définir le champ. Or, jusqu'à présent, elle nous a renseignés sur les deux points suivants :

1. existence et définition des deux premiers niveaux d'hétérogénéité : les phases minéralogiques et les constituants pétrographiques,
2. assemblages privilégiés des phases minéralogiques en un très petit nombre de paragenèses. Les assemblages sont provoqués par les deux causes physiques essentielles dans la genèse du gisement : les conditions du dépôt et l'importance des agents réducteurs biologiques lors de l'enfouissement.

Compte tenu de ces résultats, qui définissent les horizons homogènes, on appellera champ le plus grand volume d'une paragenèse donnée. Très souvent, les variogrammes ne seront pas tracés à travers tout le champ, mais une portion de celui-ci.

4.2. Extension latérale

Ces champs se présentent sous forme de couches minéralisées. Distinguons donc leur extension latérale de celle qui est perpendiculaire au plan pratiquement horizontal des couches.

Un faciès peut se terminer latéralement de trois façons (affleurement exclu) :

- par épuisement de la puissance de la couche
- par dilution du faciès dans un autre (Ex. : remplacement progressif des oolithes de limonite par des oolithes calcaires)
- par interpénétration en dents de scie du premier faciès avec celui qui lui succède. Ces dents de scie peuvent avoir plus de cent mètres de long, sur quelques dizaines de centimètres d'épaisseur.

Ces terminaisons latérales ne sont pas très gênantes pour l'exploitation, ni pour l'estimation géostatistique, car elles se déroulent sur de grandes distances. Si toute une concession se trouve dans l'une de ces zones de transition, on peut néanmoins construire des variogrammes dans la région de frontière, à la condition qu'ils ne soient utilisés que dans les endroits même où on les a calculés.

4.3. Extension verticale

Dans la direction perpendiculaire aux couches, qu'on appellera verticale, les problèmes sont plus délicats. La puissance minéralisée y détermine non seulement le champ, mais la longueur du support. De plus, au delà du toit et du mur, les transitions avec le stérile sont parfois brutales et risquent d'entraîner des déboires aux exploitants qui respectent mal ces limites.

Il est donc utile de considérer cette direction avec précision à la lumière de l'analyse géologique. Ces travaux, dus à A. BERNARD et L. BUBENICEK, peuvent être sommairement résumés ainsi.

5. DESCRIPTION SEQUENTIELLE DU GISEMENT

5.1. Séquences

Pour rendre plus comme l'étude d'une série verticale, J. LOMBARD, 1956, a introduit la notion de séquence lithologique : "Une séquence lithologique est une suite de deux termes lithologiques au moins, formant une succession naturelle, sans autre interruption importante que celle des joints de stratification". Les épaisseurs n'entrent pas en ligne de compte. Cependant, suivant l'échelle d'observation, trois ordres de séquences apparaissent : les fines à l'échelle microscopique, les moyennes à l'échelle macroscopique et les grandes à l'échelle mégascopique (à l'échelle de l'étage par exemple). La séquence correspond dans chaque cas aux phases positives de la sédimentation, ses limites supérieures et inférieures étant les phases négatives ou surfaces de stratification.

La séquence fondamentale de la formation ferrifère de Lorraine est caractérisée par une augmentation progressive de la dimension des constituants détritiques du bas vers le haut. Chaque terme lithologique défini par une distribution granulométrique se développe avec ses figures propres de structure. A ces facteurs syngénétiques se superposent les transformations diagenétiques avec leurs formes spécifiques de chaque catégorie de roches.

Limitée au toit et au mur par des surfaces de stratification, la séquence fondamentale montre (figure 1), de haut en bas la succession lithologique suivante :

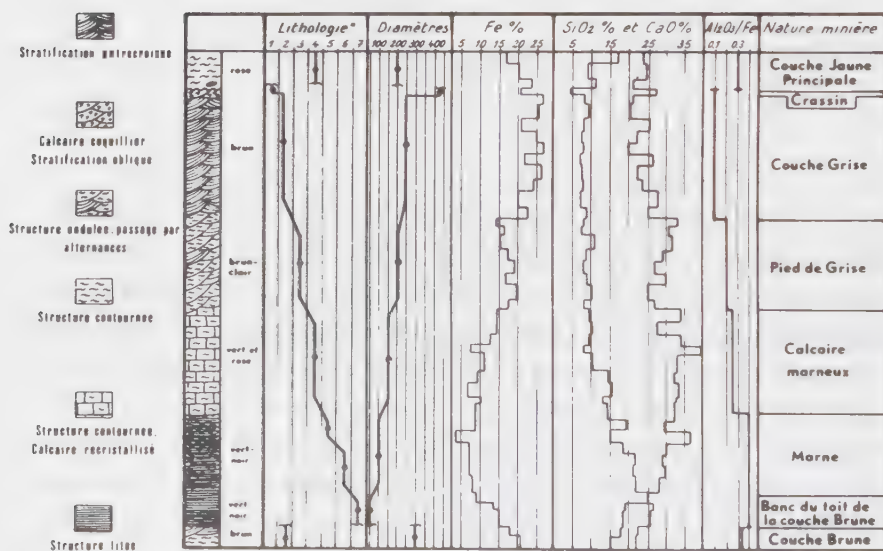


Fig.1 - Coupe et courbes lithologiques, granulométriques et chimiques de la séquence de la couche grise à Tressange, sondage C.

Série virtuelle locale (courbe lithologique): 1.-arénite coquillière grossière; 2.-ferriarénite; 3.-arénite calcaire à joints de shales argileux; 4.-calcarénite fine à joints de shales argileux; 5.-calcarénite fine et shales argileux alternés; 6.-shales argileux et micrarénite; 7.-shales argileux.

- arénite coquillière grossière en stratification oblique
- arénite en stratification entrecroisée
- arénite argileuse en structure contournée ou calcarénite fine en stratification ondulée
- microgrès et shales contournés
- argilite et shales argileux en structure liée.

Cette succession a pour première caractéristique une variation progressive de la granulométrie des sédiments : en partant de particules très fines à la base, la séquence s'accomplit avec augmentation des grains détritiques dont la nature évolue, par relais, en fonction des dimensions propres à chaque constituant pétrographique détritique jusqu'à atteindre les rudites. Une telle séquence est dite négative.

Parallèlement à ces variations granulométriques, on observe des variations corrélatives sensibles de la composition chimique : ainsi la teneur en fer est maximum pour l'arénite en stratification entrecroisée où la dimension moyenne des oolites est voisine de 200 microns. La courbe des teneurs en fer restitue en quelque sorte l'histogramme des fréquences granulométriques des oolites. La teneur en chaux varie de manière opposée à celle du fer dans les arénites, mais décroît avec l'apparition des shales argileux. La teneur en silice décroît régulièrement de la base vers le sommet de la séquence.

Pour tester la décroissance de la quantité de shales argileux, il est intéressant de dresser la courbe du rapport $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Fe}$: on vérifie ainsi que ce rapport décroît sensiblement avec les termes lithologiques de dimension plus forte.

Ainsi, la couche minéralisée au sens minier du terme apparaît elle comme une différenciation granulométrique à l'intérieur de la séquence fondamentale.

Le gisement compte aux endroits les plus épais un maximum de 12 séquences. La puissance totale de l'ensemble varie de 15 à 65 mètres. Cependant, tous les termes dans chaque séquence ne sont pas également représentés et la minéralisation elle-même peut apparaître soit dans les arénites qui se présentent alors en stratification entrecroisée (et de ce fait présenteront un niveau d'hétérogénéité de plus) ou dans des arénites argileuses et se présente alors suivant toute la gamme des faciès allant des simples alternances de stratification entrecroisée recoupée de passées argileuses au faciès contourné. Certaines séquences, enfin, même parmi les plus minéralisées, peuvent être incomplètes. Plus précisément, on peut classer leur succession lithologique en famille de séquences d'irrégularité équivalente. Dans la série du bassin principal (bassin de Briey), comprise entre les grès supraliasique et les argillites de la base du Bajocien, on distingue les familles :

- 1) séquences de vertes 6 à 1 et séquence de noire (arénite)
- 2) séquence de brune (arénite argileuse)
- 3) séquence de grise
- 4) séquence de jaune principale (arénite argileuse)
- 5) séquence de jaune sauvage, rouge principale, rouge moyenne et rouge supérieure
- 6) calcaire ferrugineuse

(On a placé "arénite" ou "arénite argileuse" en regard du nom de la séquence quand la majeure partie de sa minéralisation appartenait à l'un de ces deux types).

5.2. Séquences et couches minières

Quelles sont les correspondances entre les variables minières et les définitions précédentes ? On appelle minerai calcaire les arénites non argileuses et n'excédant pas 10 % de quartz. La composition chimique d'un minerai moyen de ce type est par exemple :

Fe	32,5 %	SiO ₂	6,5 %	CaO	17 %	Al ₂ O ₃	4 %
----	--------	------------------	-------	-----	------	--------------------------------	-----

On appelle minerai siliceux les arénites non argileuses possédant une proportion de quartz de 10 à 25 %. Une idée de la composition chimique de ce minerai peut être donnée par les chiffres précédents en intervertissant les teneurs en CaO et en SiO₂. Mais la dénomination de minerai siliceux recouvre aussi les arénites argileuses. On peut, au vu de l'analyse chimique déceler la présence d'argile dans l'arénite en calculant le rapport Al₂O₃/Fe ; s'il excède 12 %, pourcentage correspondant à l'alumine des oolites, le minerai possède de l'argile.

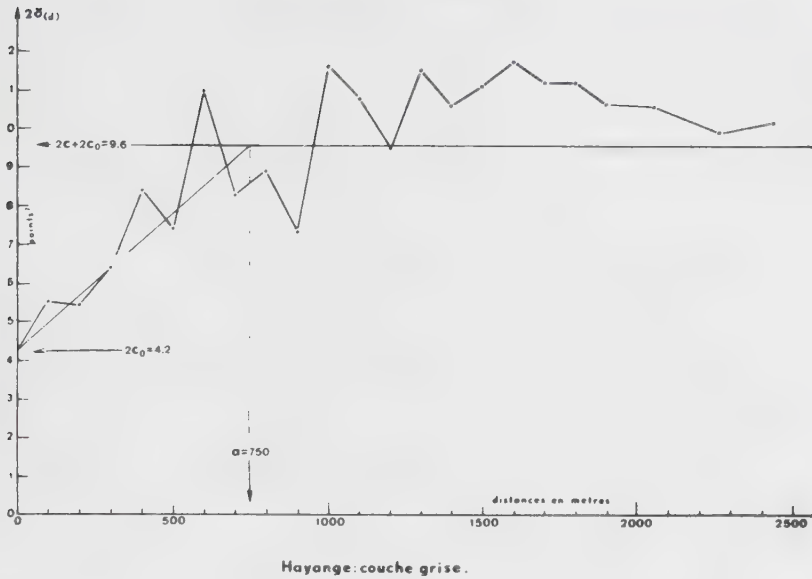
Enfin, toujours très schématiquement, on appelle minerais oxydés les arénites où le rapport Fe⁺⁺/Fe est inférieur à 5 % et minerais chloriteux ou réduits celles où le rapport Fe⁺⁺/Fe varie de 5 à 50 %. Nous ne parlerons pas des minerais hyperréduits.

La correspondance "zone à arénites" du géologue et "puissance exploitée" du minerai n'est pas évidente. Le géologue qui analyse un sondage voit toute formation, le mineur ne voit rien au delà du toit et du mur qu'il a tracés par simple continuité, et il peut commettre d'assez grosses erreurs. De plus, il arrive que des migrations aient renvoyé au pied de l'arénite une bonne part de la calcite créant un banc hétérogène pour l'exploitation, mais homogène du point de vue séquentiel. Là, il est évident que le point de vue du mineur prime.

6. PHENOMENES DE TRANSITION DANS LES COUCHES MINERALISEES, ECHELLE MINIERE

La première étape pour mesurer un phénomène de transition consiste à savoir construire un variogramme à partir des données expérimentales. C'est pourquoi, nous renvoyons le lecteur à l'exercice B du chapitre III des annexes, où il trouvera à la fois la construction du variogramme expérimental et les résultats. Reportons simplement ici un variogramme extrait d'une autre couche, mesuré à la même échelle, par des supports analogues (figure III - 5) :

Fig.5 - Exemple de variogramme



Ces deux exemples sont construits dans des champs rectangulaires de $3 \times 2 \text{ km}^2$ à partir de supports traversant les couches minéralisées du toit au mur, prises effectuées par forations et récupérations de poudres.

Dans tous les cas, le variogramme s'apparente à un même type, caractérisé par quatre ou cinq paramètres :

- un décrochement ou effet de pépite à l'origine : $2 C_0$
- une croissance plus ou moins linéaire jusqu'à un palier $2 (C + C_0)$ atteint au delà d'une distance finie a

- une anisotropie géométrique éventuelle, caractérisée par le rapport $\frac{a_M}{a_m C}$ des portées extrémales suivant la direction de l'espace (cf. exercice $a_m C$).

- le cas échéant, un effet de trou ou présence d'un maximum du variogramme.

La signification de ces paramètres est la suivante :

Effet de pépite : présence de régionalisations d'échelles inférieures.

Palier : existence possible d'une régionalisation plus vaste, mais sûrement grande par rapport à l'actuelle, autrement dit d'une autre échelle.

Portées : dépôt formé d'unités empilées de façon plus ou moins désordonnée les unes par rapport aux autres, mais de taille moyenne égale, dans la direction considérée, à la portée a .

Anisotropie : reflet de l'anisotropie des unités de dépôt.

Effet de trou : les unités voisines sont reliées par une corrélation négative, les formations riches tendant à s'entourer de zones pauvres et réciproquement.

Cette interprétation, que le lecteur pourra trouver justifiée et bien plus développée dans notre étude "géologie mathématique du gisement de fer lorrain" (à paraître), suggère qu'on analyse de plus près ce qui se passe aux deux extrémités de la courbe variogramme et qu'on aille mesurer les micro et macro régionalisations qui entourent l'échelle hectométrique minière.

C'est ce que nous allons faire maintenant. Nous profiterons de l'étude sub-minièrre pour introduire le problème de l'échantillonnage. En effet, si les couches minéralisées sont définissables à grande échelle dans l'espace à deux dimensions, au contraire lorsqu'on mesure les différences de teneurs de points distants de 50 cm latéralement, les trois ou quatre mètres de puissance de la couche ne peuvent pas être ignorés. Il faut donc repenser autrement et le champ, qui apparaît alors comme un volume, et les supports qui pourront varier du point jusqu'à la carotte de sondage. A chaque support correspond une montée particulière, calculable à partir du variogramme des teneurs de support ponctuel (on pourra considérer dans ce qui suit les blocs élémentaires comme des supports ponctuels).

7. EXEMPLE DES REGIONALISATIONS METRIQUES

7.1. Situation de l'étude et de l'échantillonnage

L'étude a été menée au nord de la concession de Tucquegnieux, en couche grise, dans une galerie orientée E-O ; la couche minéralisée a un peu plus de trois mètres de puissance. Mesurés sur 2,50 m à partir du mur de la galerie, les teneurs moyennes locales (sur 10 mètres de parement) sont :

Fe	34,40
CaO	15,05
SiO ₂	5,24
Fe ⁺³	6,89
Al ₂ O ₃	3,96

Il s'agit donc là d'un minerai du type entrecroisé, on n'y voit du reste pratiquement pas d'argile. Le minerai est moyennement réduit. La calcite a migré sous forme de petites concrétions de 50 cm de longueur sur 10 cm d'épaisseur, en moyenne ; de plus, deux longs bancs calcaires de plus de deux mètres zèbrent le parement.

Dans ce parement ont été prélevées deux séries d'échantillons :

Des carottes horizontales de 35 cm de long et 60 mm de diamètre, carottées normalement au plan du parement, selon une maille rectangulaire. Horizontalement, on a pris une carotte tous les 25 cm et verticalement une carotte tous les 42 cm à partir du mur, sur 2,50 m ; au total, il y a, compte tenu d'une demi-douzaine de lacunes, 219 carottes (figure 6).

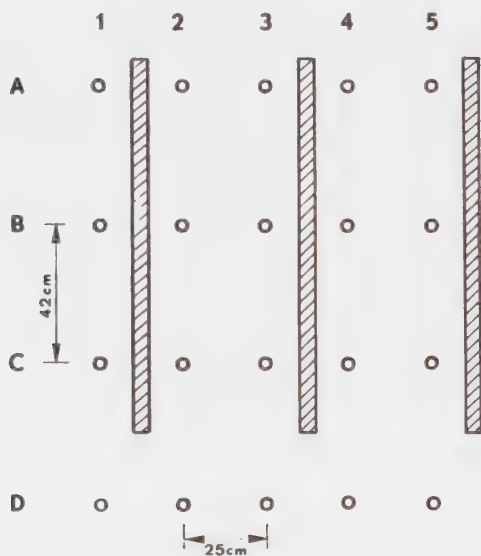


Figure 6
Schéma de carottage

Chaque carotte a ensuite été débitée, normalement à son axe, en six ou sept tronçons de 4 cm, ce nombre variant avec la longueur carottée. Les tronçons ne sont pas jointifs, mais séparés par une lamelle d'un centimètre d'épaisseur. Les centres de gravité des blocs sont donc distants de 5 centimètres, et le volume du bloc élémentaire mesure

$$\gamma \cdot \frac{6,0^2}{4} \cdot 4 \sim 106 \text{ cm}^3$$

Chaque bloc élémentaire, par sa forme, est sensiblement équivalent à un cube de 4,75 cm de côté. Il y a au total 1320 blocs élémentaires.

La deuxième série d'échantillons est constituée du détail des prélèvements de cinq saignées verticales. Les saignées ont 1,70 m de long et sont distantes l'une de l'autre de 50 cm. Chacune d'elles, effectuée par des moyens mécaniques précis, respecte un gabarit exact de 5 x 4 cm de section. On a prélevé séparément la poudre des saignées tous les 5 cm de façon à disposer d'un échantillon élémentaire de 100 cm^3 , pour qu'il soit équivalent au volume des blocs horizontaux. Pour l'ensemble des cinq saignées, il vient au total 170 échantillons.

Les résultats qui suivent partent donc d'une base expérimentale techniquement rigoureuse, tant en repérage qu'en forme exacte des prélèvements, et constituée par 1 500 échantillons élémentaires.

7.2. Résultats

Les variogrammes expérimentaux résultant de cette campagne seront présentés en deux fois. La possibilité de faire varier le support depuis le tronçon de carotte de 5 cm jusqu'à des carottes entières et des séries de

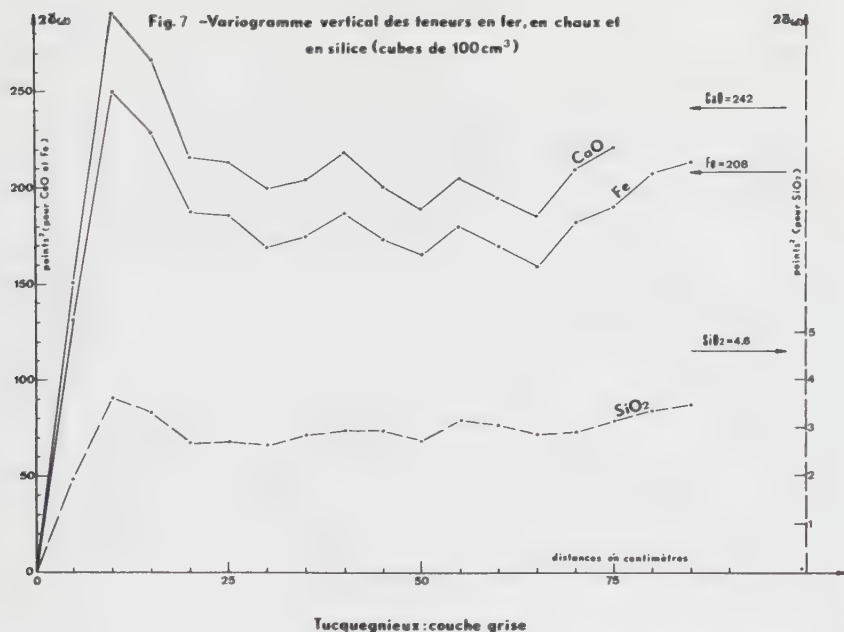
carottes a permis de contrôler la validité des formules de montée qui servent à cette échelle à résoudre le problème de l'échantillonnage du minerai en place. Cette partie sera donc exposée au chapitre VI.

L'étude des variogrammes élémentaires, par contre, est à sa place ici, à titre d'exemple.

On peut regrouper les variogrammes de la calcite, du quartz et le l'ensemble limonite + chlorite + sidérose. On a conservé les teneurs chimiques, car il n'y a pas de moyen simple de passer de la teneur en fer à celle de l'ensemble limonite + chlorite + sidérose.

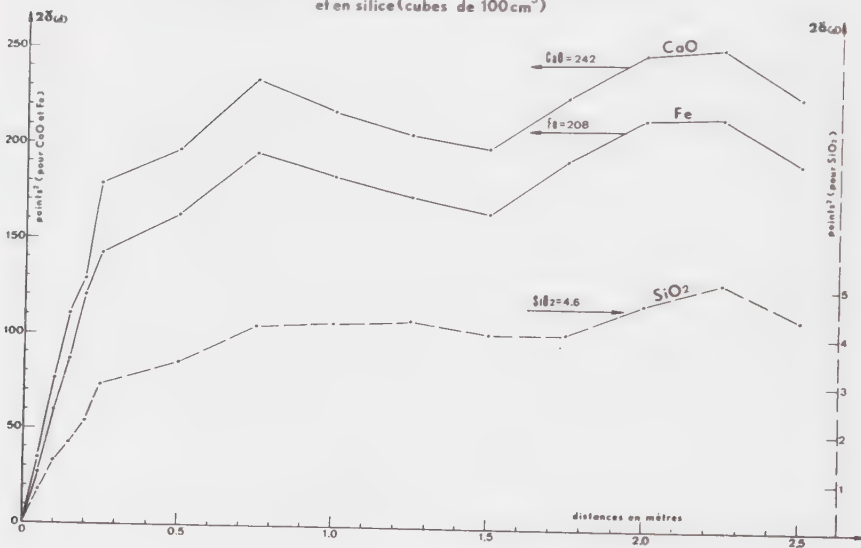
On remarque sur les variogrammes verticaux (figure 7) un effet du trou dû au concrétionnement de la calcite qui migre. Le quartz réparti plus uniformément que les autres constituants est relativement moins sensible à la migration (position du maximum par rapport au palier de la silice).

Les variogrammes horizontaux sont plus complexes. Les concrétions elles-mêmes, petites, n'excèdent pas 50 cm. Elles doivent être suffisamment indépendantes les unes des autres, dans cette direction, mais sans effet de trou. La fluctuation périodique de période 1,50 m, qui apparaît très nettement au point à 75 cm (maximum de la demi-période) et à 2,25 m, est relative au regroupement des concrétions par ensembles plus ou moins denses. Il faut



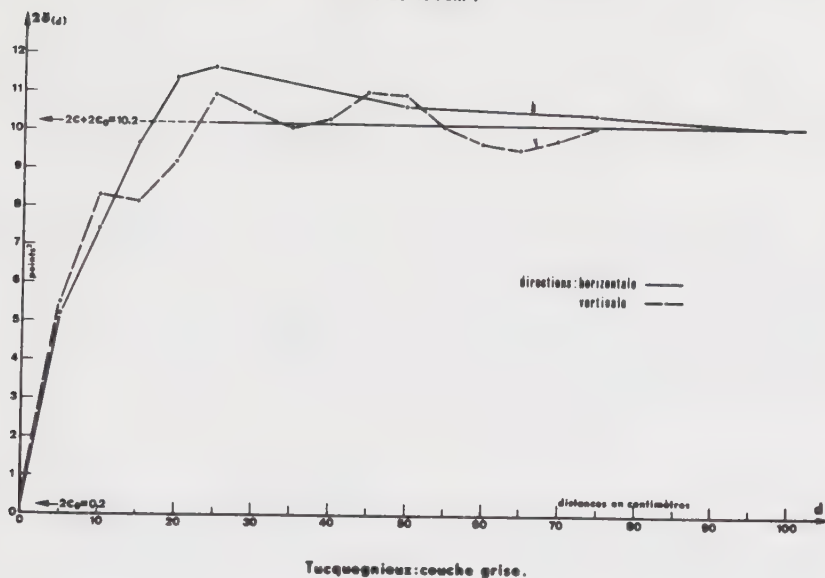
rester assez prudent pour lui attribuer le caractère intrinsèque, étant donné sa taille vis à vis du champ total (9 mètres). Il est plus sage de ne voir là qu'une fluctuation locale. Enfin, le léger décrochement des variances à 25 cm demande à être expliqué par le variogramme de la sidérose.

Fig. 8 -Variogramme horizontal des teneurs en fer, en chaux
et en silice (cubes de 100 cm³)



Celui-ci (figure 9) est extrêmement instructif. Contrairement aux trois autres, il est isotrope dans tous l'espace et présente un effet de trou plus net dans la direction horizontale que dans la direction verticale et situé à 25 cm seulement. La migration de la sidérose a été prise sur le vif.

Fig.9 -Variogrammes des teneurs en fer ferreux (Fe^{++})
(cubes de 100 cm^3)



Il n'est pas possible, par l'observation géologique, de retrouver des paquets compacts de 25 cm, mais uniquement des petits cristaux. Pourtant, le phénomène de regroupement a déjà eu lieu et s'est trouvé comme figé par l'arrêt de la réduction, dans un stade de coalescence inachevée. Les facteurs physico-chimiques de cette dernière migration et de celle de la calcite doivent être bien différentes puisque ni les directions, ni les portées ne sont conservées de l'un à l'autre.

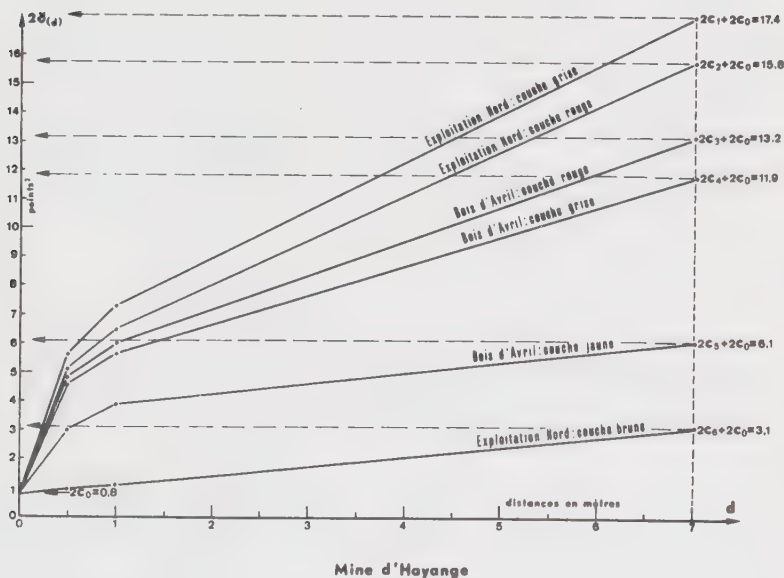
8. RACCORDEMENTS DES ECHELLES

On peut se demander s'il existe, entre l'échelle métrique étudiée au paragraphe 7 et l'échelle hectométrique du paragraphe 6, une transition intermédiaire ou si, au contraire, elles se raccordent l'une à l'autre.

Cette question, à laquelle nous allons donner maintenant une réponse expérimentale, est d'ailleurs générale à toutes les superpositions d'échelles et nous n'aurions pas pu aboutir aux résultats du paragraphe 10 (fonctions de synthèse du gisement) si des études expérimentales analogues à celle-ci n'avaient été conduites pour tous les raccordements d'échelles.

La mine de Hayange utilise comme prélèvements au fond des groupes de trois prises distantes de cinquante centimètres les unes des autres. De plus, ces groupes, implantés à la croisée des galeries de traçages sont à 100 mètres les uns des autres. Nous disposons là d'un ensemble de 2000 prises, réparties sur des kilomètres carrés, et à travers 6 couches minéralisées. On peut cerner le raccordement entre les échelles métrique et hectométrique par les deux bouts, soit en calculant les deux points à 50 cm et à 1 mètre, soit par prolongement analytique de la droite définie par les points à 100, 200, 300 m ... (figure 10). Le point de prolongement a été reporté, arbitrairement, à 7 mètres. Le palier doit être en réalité un peu plus loin (vers 10 mètres), à cause de quelques passées calcaires et des unités entrecroisées elles-mêmes. Les quatre couches entrecroisées (1 - 2 - 3 - 4) ont des varigrammes affines les uns des autres, et fort voisins ; la couche 5, jaune du Bois d'Avril, qui se place dans une zone de changement de faciès, par venue

Fig.10 -Variogrammes des teneurs en fer rapportées à la puissance fictive de 1mètre



en dents de scie très longues (plusieurs centaines de mètres) du minerai contourné est nettement détachée et l'affinité avec les autres est moins nette. La couche brune enfin, entièrement argileuse n'a plus d'effet de migration : le décrochement à l'origine est dû aux erreurs de prélèvement et d'analyse.

On remarque tout de même une croissance relativement rapide qui doit être le fait d'unités décamétriques, transitions analogues à celles dues aux unités de dépôt entrecroisé. Les phénomènes d'échelle intermédiaire, qu'on remarque ici pour la première fois, existent en règle générale, mais leur variance est plus faible (2 points²) que celle de la migration (2 à 7 points²) et de l'échelle hectométrique (5 à 15 points²). De tels niveaux intermédiaires avaient déjà apparu dans les échelles sub-minières avec le litage des laminae. Ces transitions, qui n'échappent pas à l'oeil du géologue à cause de leur caractère discontinu (tangente à l'origine du variogramme) et à cause de leur taille (portée), paraissent s'effacer dans une comparaison systématique avec les autres transitions, à cause de leur amplitude relativement faible.

9. STRUCTURES INTRINSEQUES A GRANDE ECHELLE

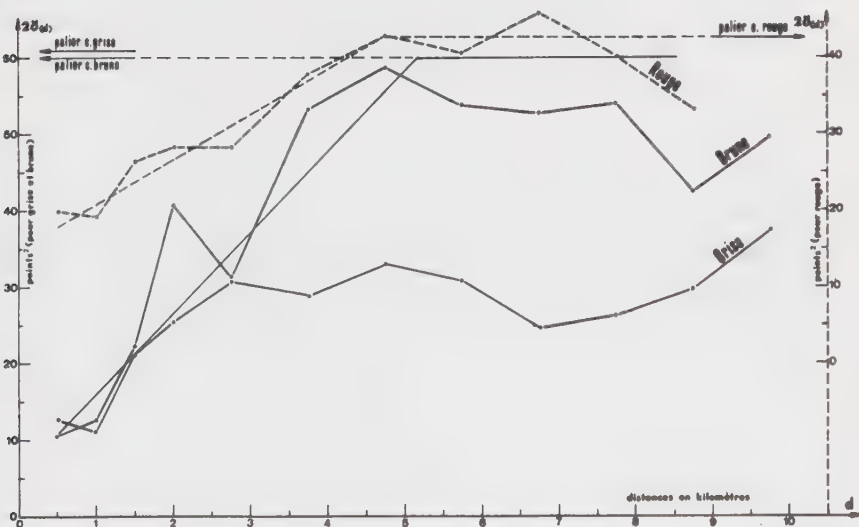
Plaçons-nous maintenant à l'autre extrémité de l'échelle minière et voyons ce que deviennent les paliers des variogrammes, si on prolonge leur détermination expérimentale beaucoup plus loin.

Le support est à nouveau le support minier usuel (sondage traversant la couche du toit au mur), le champ l'extension de la couche à travers tous le gisement. On a étudié successivement trois paramètres, la teneur en fer, la puissance et l'accumulation, pour les trois couches de surfaces les plus importantes, la grise, la rouge et la brune.

Les variogrammes des teneurs en fer sont reportés sur la figure 11. Elles reflètent trois régionalisations différentes.

Le début des courbes, pour la rouge et la grise, est décroissant. On retrouve ainsi l'effet de trou de l'échelle minière, confirmé ici pour l'ensemble de tout le bassin, chez les dépôts entrecroisés, et infirmé chez l'arénite argileuse, de brune. Les effets de pépité sont, eux aussi, variables. La couche rouge, à 500 mètres, a déjà manifesté les deux tiers de son contenu structural, alors que la grise et la brune n'en ont montré que le cinquième ; pour ces deux dernières, l'amplitude du phénomène à grande échelle coiffe celle des précédentes.

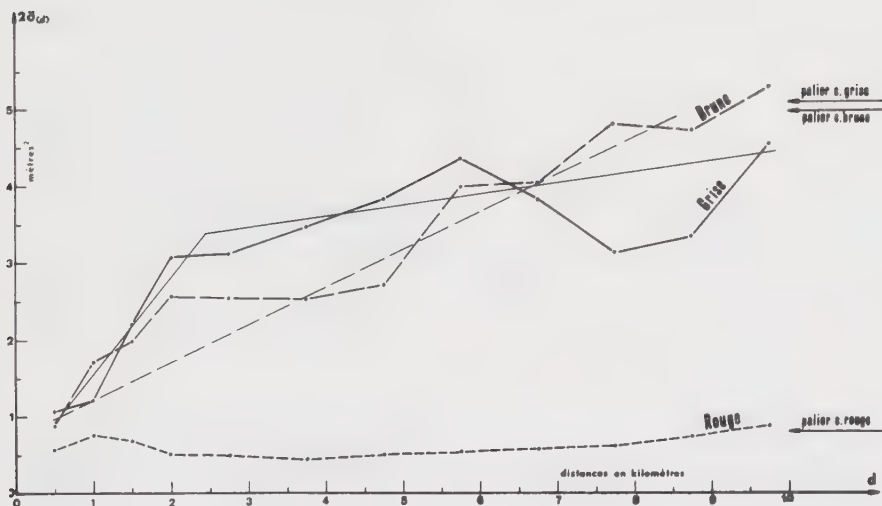
Fig.11 -Variogrammes à grande échelle des teneurs en fer



Les portées des couches rouge et brune, de 4 kilomètres et demi de taille, aboutissent au palier définitif, puisque calculé à partir de la variance des échantillons dans tout le gisement. La grise ne suit pas ce chemin et se décompose en deux transitions complètement différentes, la première ($a = 2,700 \text{ km}$, $2 C + 2 Co = 30$) ne prenant en charge que le tiers de l'amplitude totale. Le phénomène majeur doit avoir une portée moyenne fort vaste puisque son palier n'est pas encore atteint à 10 kilomètres, et son amplitude (30) vaut à elle seule autant que toutes les amplitudes précédentes.

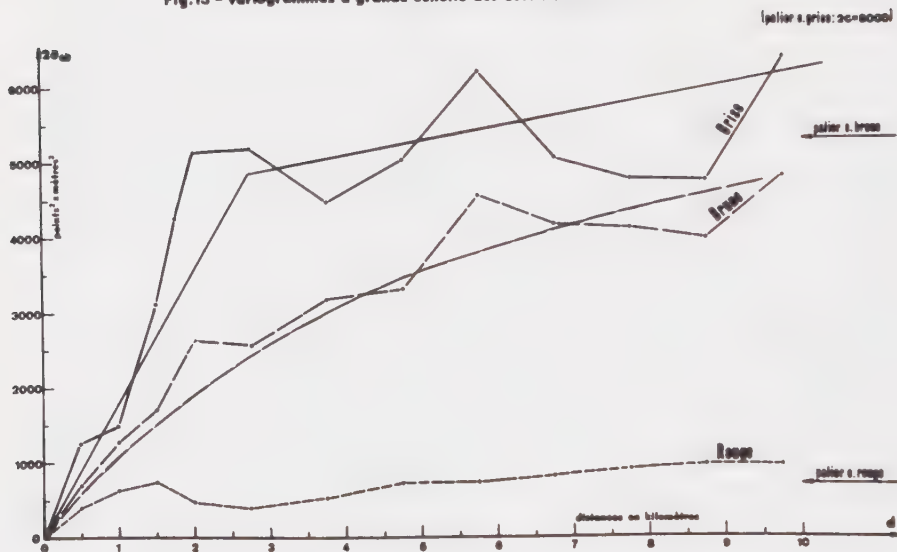
Passons aux puissances (figure 12). A nouveau, autant d'évolutions que de couches apparaissent. La rouge n'a pas de régionalisation hyperminièrè I pour ce paramètre et une très faible transition hyperminièrè II. Effectivement, on la voit sur les cartes de faciès de l'atlas dessiner un ruban légèrement fluctuant mais sans gros paquets, qui se déroule au toit des autres couches. La brune ne connaît, comme précédemment, qu'une seule régionalisation hyperminièrè, primordiale par son amplitude, mais qui s'étend jusqu'à 10 kilomètres. La grise aussi retrouve ses deux transitions, mais au contraire de la brune, elles sont plus resserrées (portée 2 km, et vraisemblablement 11 ou 12 km), les paquets de dépôts sont moins étalés que le fer n'est dilué ; l'amplitude totale ($2 C + 2 Co = 5,2 \text{ m}^2$) reste essentiellement tributaire des structures à grande échelle. Dans le cas des deux couches brune et grise, les phénomènes à l'origine n'absorbent que le cinquième de la variance. L'effet de trou d'échelle minièrè a disparu.

Fig.12 - Variogrammes à grande échelle des puissances.



Enfin, les accumulations de métal (figure 13) empruntent leurs éléments structuraux à l'une et l'autre des deux séries précédentes, avec prédominance de l'empreinte des puissances. Le nombre des transitions et les niveaux des portées sont ceux des puissances, les valeurs relatives des variances (en particulier dans la grise) celles des teneurs.

Fig.13 - Variogrammes à grande échelle des accumulations de fer.



10. SYNTHESE DES PHENOMENES DE TRANSITION DE SUPPORT MINIER

10.1. Fonctions de synthèse

Pour représenter le déploiement des diverses régionalisations d'une couche donnée, mesurées à partir de supports miniers tels que les sondages, il faut balayer, dans chaque direction de l'espace, la gamme de tous les accroissements possibles, depuis zéro jusqu'au maximum.

Le tableau (fig. 14) montre ce défilement de transitions de support minier pour les couches rouge, grise et brune.

Les premiers chiffres représentent les portées extrêmes, réduites à une seule en cas d'isotrope, le second l'amplitude du $\gamma(h)$. Zéro indique l'absence de régionalisation.

Toutes ces transitions quelles qu'en soient les échelles peuvent être interprétées comme correspondant à des structures lenticulaires emboîtées les unes dans les autres, parfois superposées dans une même couche, comme celles des unités entrecroisées.

Certaines d'entre elles sont immédiatement révélées par les procédés d'étude géologique classiques (concrétions calcaires par exemple), d'autres beaucoup moins et parfois pas du tout (les lentilles hectométriques). On peut donc songer à utiliser des variogrammes pour décrire et interpréter une minéralisation. C'est ce que nous avons réalisé à propos du gisement lorrain, dans une étude à laquelle nous renvoyons le lecteur, en nous en excusant (Géologie mathématique du gisement de fer lorrain).

TABLEAU - Fig. 14

	échelle des concrétions	échelle minièrè	échelle hyper- minièrè I	échelle hyper- minièrè II
Couche grise (arénite non argileuse)				
Teneurs	2 m, 2 pts ²	500-250 m, 4 pts ²	3-2 km, 8 pts ²	20-10 km, 16 pts ²
Puissance	0	500-250 m, 0,5 m ²	2 km; 1,25 m ²	15-10 km; 1,25 m ²
Accumulations	0	500-250 m, 600 (t.m) ²	2 km, 1900 (t.m) ²	15-10 km; 1500 (t.m) ²
Couche brune (arénite argileuse)				
Teneurs	1 m, 0,3 pts ²	300 m, 2 pts ²	5 km; 25 pts ²	0
Puissance	0	300 m, 0,4 m ²	0	10 km; 2,2 m ²
Accumulations	0	300 m; 250 (t.m) ²	0	10 km; 2400 (t.m) ²
Couche rouge principale				
Teneurs	2 m, 2 pts ²	500-250 m; 15 pts ²	4,7 km; 12 pts ²	0
Puissance	0	1-0,5 km; 0,25 m ²	0	10 km; 0,15 m ²
Accumulations	0	1-0,5 km; 250 (t.m) ²	0	10 km; 120 (t.m) ²

10.2. Répercussion des transitions sur les problèmes miniers

En pratique, au niveau d'une mine ou d'un quartier, deux transitions auront de l'importance, celle des concrétions et celle des lentilles hectométriques, qu'on a appelé l'échelle minière.

Au niveau du calcul des réserves du gisement, la première échelle hyperminière commandera les lois de l'estimation des grands panneaux. On verra au chapitre V comment la hiérarchie de ces trois structures géologiques s'imbrique avec celle des technologies minières et celle des problèmes économiques.

CHAPITRE IV

LES SCHEMAS INTRINSEQUES

SOMMAIRE

Ce court chapitre est destiné à la définition et au calcul numérique des fonctions de base dont on aura besoin, pour quelques schémas géostatistiques représentant des phénomènes de transition.

Après avoir rassemblé au paragraphe 1 les propriétés formelles des variogrammes expérimentaux et choisi, au paragraphe 2, cinq schémas géostatistiques qui les prennent en charge (schéma de Matheron, schéma de Formery, schéma gaussien, schéma linéaire, schéma de migration) on définit au troisième paragraphe l'inventaire des fonctions de base qui seront nécessaires à leur calcul.

Le paragraphe 4, enfin, discute la validité de ces modèles théoriques.

1. CARACTERISTIQUES FORMELLES DES VARIOGRAMMES EXPERIMENTAUX

Si l'on résume en quelques traits principaux les propriétés formelles des variogrammes que l'expérimentation nous a révélées au chapitre précédent, on peut ramener ces propriétés aux caractéristiques suivantes :

1.1. Propriétés à l'origine

Les trois comportements possibles se trouvent réalisés :

- discontinuité à l'origine ou effet de pépité (Ex. : variogramme de teneurs)
- tangente oblique à l'origine (Ex. variogramme des quantités de métal de Godbrange)
- tangente nulle à l'origine (Ex. : variogramme des puissances de Giraumont).

1.2. Comportement aux grandes distances

- Le variogramme atteint son palier à une distance finie par valeurs inférieures en général, et supérieures quand il y a effet de trou (Ex. : teneurs en fer des couches rouge et grise, échelle des 100 mètres).

- Il tend asymptotiquement vers son palier sans paraître l'atteindre effectivement (Ex. : concrétions calcaires couche rouge de St-Pierremont).

- Il croît linéairement (Bassin de Briey, couche brune échelle du kilomètre).

Le dernier cas apparaît comme la limite des précédents quand la maille de reconnaissance est petite vis à vis de la portée ; la partie du variogramme expérimentalement accessible devient alors pratiquement confondue avec sa tangente à l'origine.

1.3. Anisotropies

Les anisotropies mises en évidence se ramènent à :

- l'anisotropie géométrique

La régionalisation se déduit d'une régionalisation isotrope par affinité géométrique (Ex. : la majorité des variogrammes de l'échelle des 100 mètres).

- anisotropie zonale

(Ex. : teneurs en fer dans les couches entrecroisées à l'échelle du mètre).
Le variogramme se décompose en la somme des plusieurs termes, les uns isotropes, les autres constants dans certaines directions. Souvent, les couches entrecroisées (échelle du mètre) présentent des concrétions suffisamment allongées pour qu'on puisse décomposer le variogramme en deux termes :

$$(IV, 1) \quad \gamma(h) = \gamma_1(h_1, h_2) + \gamma_2(h_3)$$

où h_3 est vertical. Les superpositions de régionalisations se traitent formellement comme des anisotropies zonales.

2. SCHEMAS THEORIQUES

Pour prendre en charge les différentes caractéristiques énumérées au paragraphe 1, nous utiliserons cinq modèles mathématiques de base.

Ces modèles décrivent des régionalisations pures et isotropes. Il faudra donc, le cas échéant, les sommer entre eux, leur rajouter un effet de pépité, ou corriger les anisotropies géométriques par des affinités convexes. Ces cinq modèles sont :

- 1 - les schémas de Matheron et en particulier le schéma sphérique
- 2 - le schéma de Formery
- 3 - le schéma gaussien
- 4 - le schéma linéaire
- 5 - un schéma de migration.

Ils regroupent au total une gamme assez complète de possibilités, puisque la tangente à l'origine peut être nulle (n° 3 ou schémas montés) ou oblique (n° 1 - 2 - 4 - 5), la croissance peut en être plus ou moins ménagée (différents schémas de matheron et n° 3) la portée restant finie, ou au contraire la portée étant infinie (n° 2), le palier peut apparaître explicitement (n° 2 - 1 - 3 - 5) ou être rejeté vers une abscisse infinie (n° 4), enfin, des effets de trou sont possibles (n° 5).

Le choix des cinq schémas a d'ailleurs été décidé précisément à cause de ces raisons formelles ; donnons ou rappelons néanmoins des interprétations

probabilistes qui permettront de les incarner dans un contenu physique plus imagé que leur formulation mathématique.

Les schémas de Matheron peuvent relever de la classe des processus de dilution. Dans l'espace à n dimensions, on met en place des charges ponctuelles réparties suivant un processus de Poisson. Puis chaque charge est diluée uniformément suivant l'hypersphère à n dimensions, de rayon r , centrée en son point de mise en place. Si un point de l'espace contribue à plusieurs hypersphères, sa teneur est la somme de toutes les dilutions en ce point. Le processus ainsi bâti admet pour fonction intrinsèque un schéma de Matheron à n dimensions, dont la portée est le diamètre de l'hypersphère.

Le schéma gaussien peut être interprété de la même manière, à condition de répartir chaque charge non plus uniformément, ni dans une sphère, mais à travers tout l'espace suivant la pondération $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$ c'est-à-dire l'exponentielle de Gauss à n dimensions.

On interprétera le schéma de Formery différemment. Dans l'espace à n dimensions, un réseau de sous-espaces à $n - 1$ dimensions répartis au hasard (points sur une droite, droites aléatoires dans le plan, etc...) découpe l'espace en compartiments indépendants. Dans chacun de ses compartiments règne une teneur constante, indépendante de celle des autres éléments de la partition. Le processus obtenu admet pour fonction intrinsèque le schéma de Formery.

Le schéma linéaire, est non seulement la valeur asymptotique des schémas de Matheron et de Formery quand les distances mises en jeu sont

très petites, mais peut, lui aussi, recevoir une interprétation physique : celle du mouvement brownien. A partir de l'origine, c'est-à-dire de l'emplacement à l'instant $t = 0$ d'une particule animée de mouvement brownien, on exprime la distance de la particule à chaque instant t suivant la fonction aléatoire $f(t)$, appelée processus de Wiener-Lévy. Le variogramme de ce processus est un schéma linéaire.

Le schéma de migration que nous proposons dans les annexes (ch. IV) correspond au processus suivant :

1 - des germes sont implantés sur une droite suivant un processus de Poisson de densité de variance λ

2 - l'élément migrateur est réparti sur la droite selon une densité uniforme de valeur $p < 1$; dans tout segment d il y a la quantité $p \cdot d$ d'élément migrateur.

3 - les éléments migrateurs compris entre 2 germes voisins migrent tous vers le germe le plus à gauche (ou à droite). Si les points x et $x + \ell$ sont 2 germes voisins, l'élément migrateur se masse donc complètement entre x et $x + p \cdot \ell$ et disparaît du segment $x + p \cdot \ell$, $x + \ell$. On crée ainsi une fonction aléatoire en tout ou rien, dont le variogramme possède un remarquable effet de trou.

Les expressions formelles de ces cinq modèles se trouvent dans les études pratiques, avec les calculs géostatistiques y afférant (ch. IV).

3. INVENTAIRE DES FONCTIONS DE BASE

Considérons maintenant un schéma, c'est-à-dire le modèle théorique d'une transition isotrope, prise à l'état pur, sans l'imbrication d'autres phénomènes. Le schéma est déterminé quand on connaît la variance des accroissements de la variable prise sur tous les supports S et S' qu'on peut implanter de toutes les façons possibles l'un par rapport à l'autre. S pourra être un sondage et S' le panneau qui l'entoure, ou un traçage traversant une portion de couche, etc... Ces variances, ou variances d'extension sont toutes calculables à partir de la plus élémentaire d'entre elles, la fonction $\gamma(h)$ ponctuelle. Cette fonction ou demi-variogramme réduit en effet les deux supports à deux points. La reconstitution de toutes les variances d'extension en fonction du $\gamma(h)$ est formulée par l'expression (II, 8) fondamentale :

$$D^2 (Y - Z) =$$

$$(II, 8) \quad \frac{2}{VV'} \int_V \int_{V'} \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x_1 - x_2) dx_1 dx_2$$

$$- \frac{1}{V'^2} \int_{V'} \int_{V'} \gamma(x'_1 - x'_2) dx'_1 dx'_2$$

où Y et Z sont les valeurs moyennes de la variable régionalisée dans les volumes V et V' des supports S et S'. La variance d'extension apparaîtra

dans la deuxième partie comme un point de départ. En la dotant d'une signification purement technologique, on posera le problème du krigeage et celui du calcul des réserves en lui attribuant une interprétation économique. Au niveau des généralités traitées dans cette première partie, elle apparaît au contraire comme un point d'aboutissement (II, 8) résoud le problème de la connaissance de tout le schéma à partir du $\gamma(h)$ sur le plan théorique, mais reste à calculer effectivement, sur le plan numérique.

Or, on voit que c'est une intégrale sextuple aux limites variables pour chaque V et chaque V' qui menace d'apparaître très complexe même pour un $\gamma(h)$ analytiquement simple.

Pratiquement, il n'est pas nécessaire de conserver à V et V' les formes les plus diverses. Dans les travaux miniers, ils se particularisent en effet en sondages, traçages, polygones simples, rectangles ou parallélogrammes, ou à trois dimensions, en les polyèdres réguliers correspondants. Les formes droites particulières ont déjà suggéré au chapitre II les principes de calcul des montées, ici elles vont nous permettre le choix de certaines expressions de variances d'extension de base qu'on calculera. Elles seront toutes relatives à un seul segment ou polygone ou polyèdre rectangle reconnu par un point, segment, ou plan médian, ou des points ou des segments situés aux extrémités.

On a calculé les fonctions suivantes : (cf. les définitions et notations au ch. II)

Montées d'ordre un et deux :

$$(IV, 2) \quad \begin{cases} M(\ell; h) = \gamma(h; \ell) - \gamma(0; h) \\ M(\ell; h, h) = \gamma(\ell; h, h) - \gamma(0; h, h) \end{cases}$$

Variances d'un point dans le segment h , le rectangle ℓ, h , et le prisme ℓ ,

$$(IV, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(h) = \gamma(0; h) \\ F(h, \ell) = \gamma(0; h, \ell) \\ F(\ell, h, h) = \gamma(0; \ell, h, h) \end{array} \right.$$

Variance d'extension $\sigma_{E_1}^2$ du point milieu dans le segment ℓ :

$$\sigma_{E_1}^2 = 2 X\left(\frac{\ell}{2}\right) - F(\ell)$$

Variance d'extension $\sigma_{E_2}^2$ du point central dans le carré de côté ℓ :

$$\sigma_{E_2}^2 = 2 H(\ell/2, \ell/2) - F(\ell, \ell)$$

(IV, 4)

Variance d'extension $\sum_{E_1}^2$, dans le segment ℓ , de ses deux extrémités :

$$\sum_{E_1}^2 = 2 X(\ell) - F(\ell) - \frac{1}{2} \gamma(\ell)$$

Variance d'extension $\sum_{E_2}^2$, dans le carré de côté ℓ , de ses quatre points d'angle

$$\sum_{E_2}^2 = 2 H(\ell, \ell) - F(\ell, \ell) - \frac{1}{4} \left[2 \gamma(\ell) + \gamma(\ell\sqrt{2}) \right]$$

Variance d'extension $\sigma_{E_3}^2$ d'un sondage axial dans le parallélépipède à base carrée ℓ, h, h .

$$(IV, 5) \quad \sigma_{E_3}^2 = 2H\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \ell\right) - F(\ell, h, h) - F(\ell)$$

Variance d'extension $\sigma_{E_4}^2$ du traçage médian h dans le rectangle ℓ, h , et $\sigma_{E_5}^2$ de la section médiane h, h dans le parallélépipède ℓ, h, h .

$$(IV, 6) \quad \left[\begin{array}{l} \sigma_{E_4}^2 = 2X(\ell/2, h) - F(\ell, h) - F(h) \\ \sigma_{E_5}^2 = 2X(\ell/2, h, h) - F(\ell, h, h) - F(h, h) \end{array} \right.$$

La stylisation des panneaux miniers sous forme de polyèdres permet le calcul effectif des intégrales précédentes. On en a présenté les résultats sous forme d'abaques, accompagnés des interprétations géométriques des formules dans les études pratiques.

Il reste maintenant à voir quel est leur domaine de validité. En fait, ces modèles valent ce que vaut l'ajustement du variogramme à son modèle théorique. Quelles sont les fluctuations possibles auxquelles on doit s'attendre ?

4. FLUCTUATIONS DE LA TENEUR, DES VARIANCES, ET DU $\gamma(h)$

Les ajustements sont fondés sur deux hypothèses, celle de la loi de dispersion intrinsèque et celle d'un modèle particulier de cette loi, et sur deux estimations, celle de la variance dans le champ V et la détermination de la pente à l'origine du variogramme. Enfin, en ne corrigeant pas les données numériques par une dérive, on a supposé implicitement que celle-ci était nulle (l'hypothèse intrinsèque se serait accommodée d'une dérive linéaire, à la condition qu'on la rectifiât sur les échantillons ou sur le variogramme expérimental).

Dans quelle mesure ces procédés sont-ils légitimes ?

Distinguons, pour chaque paramètre, une valeur expérimentale calculée à partir du réseau fini des prélèvements, une valeur locale, calculée à partir de toutes les valeurs prises par $f(x)$ dans un champ V, et enfin une valeur théorique ou valeur probable à priori des précédentes. On appelle fluctuation la différence entre la valeur locale et la valeur théorique.

G. MATHERON (les variables régionalisées, chap. XIII) a montré que pour une dérive linéaire ou une variance locale, l'ampleur des fluctuations est énorme. En ce qui concerne le demi-variogramme local, seuls ses premiers points sont bien représentatifs de la fonction intrinsèque théorique. Aux distances croissantes, l'ampleur des fluctuations devient vite démesurée. C'est pour cette raison que les techniques d'ajustement proposées portent essentiellement sur les premiers points du demi-variogramme et que la dérive est ignorée. Au contraire, l'estimation d'une valeur locale par une valeur expérimentale peut, en général être faite dans des conditions acceptables. (La variance est légèrement biaisée, mais de façon négligeable en pratique).

Mais ces conclusions se réfèrent toujours à l'hypothèse intrinsèque. Or, les phénomènes observés, même à une échelle relativement petite, comme l'échelle minière, ne vérifient pas cette hypothèse.

Lorsqu'on compare, par exemple, deux variogrammes des teneurs en fer de la couche rouge, dont les champs sont situés à cinq kilomètres l'un de l'autre, on constate que les courbes expérimentales sont fort semblables. Pourtant, une dizaine de kilomètres plus loin, à Saint-Pierremont, dans la même couche, apparaît une anisotropie zonale nouvelle alors que l'ancienne anisotropie géométrique disparaît. Est-ce à dire qu'il n'y a rien d'intrinsèque dans cet ensemble ? Pas exactement. Le principe de formation par bancs de sable est général à toute la partie de couche rouge entrecroisée, à ces trois concessions entre-autres. Seulement l'implantation des chenaux majeurs desquels partent tout le réseau artériel générateur des bancs n'est pas intrinsèque, ou tout au moins pas à cette échelle.

Dans ces structures produits de deux causes, l'on doit donc s'attendre à trouver des caractéristiques intrinsèques du variogramme, permanentes pour la quasi totalité du gisement (par exemple, par portée moyenne $\frac{3}{2} a = 400$ mètres) et d'autres, comme les axes et les types d'anisotropies, qui varieront beaucoup plus sensiblement.

En ce qui concerne l'estimation, cet état de choses a trois conséquences principales. D'abord il faut éviter d'avoir à se poser le problème des fluctuations par rapport à une fonction intrinsèque assez hypothétique (c'est à ce niveau qu'interviendraient des tests géostatistiques) ; ce qui en pratique impose

d'utiliser le schéma théorique d'un variogramme dans les régions mêmes où il a été calculé, ou dans leur voisinage proche. Comme, dans ces conditions, on sait que les estimations sont le plus souvent très acceptables, la théorie se met en place sans poser de difficultés.

La seconde conséquence, plus géologique que minière, est l'exploitation de la régionalisation même du variogramme. Ces paramètres principaux se déforment suffisamment lentement à travers l'espace pour qu'on puisse, à partir du schéma intrinsèque tangent à chaque région, reconstituer les caractéristiques majeures de l'échelle supérieure. Peut-être, à ce niveau là sera-t-il possible de prévoir le variogramme d'une zone donnée.

Enfin, le problème du choix du modèle est finalement assez simple. Du moment qu'on se contente d'estimer des variables locales, on le choisira selon sa ressemblance avec le variogramme, en respectant les impératifs de cohérence mathématique et géologique. En pratique, si la tangente à l'origine est oblique et la portée finie, on adoptera le schéma de Matheron, et si cette portée est infinie, (croissance très ménagée), on choisira le schéma de Formery. La qualité des calculs géostatistiques ultérieurs dépendra beaucoup plus de la précision de l'estimation de la tangente à l'origine et de la variance que du choix du modèle. Pour une même tangente à l'origine $\frac{C}{a}$, la variance d'extension $\sigma^2_{E_2}$, d'un panneau carré reconnu par son sondage central, vaut 0,245 C, au point d'abscisse a en schéma de Matheron, et 0,235 C en schéma de Formery, soit une différence de un pour cent. Aux très grandes mailles, la différence est encore moins

sensible, alors que pour des distances de l'ordre de quelques fois la portée, l'écart entre les deux schémas croît. Ainsi à l'abscisse 4,5 du schéma de Formery, la même variance ne vaut que 0,72 C, alors que son équivalent en schéma de Matheron de même tangente à l'origine (point d'abscisse 3 a) vaut 0,92 C, soit 20 % de plus. Ce qui, somme toutes est bien normal puisque nous nous trouvons là aux distances où le caractère ménagé du schéma de Formery, par opposition au palier du schéma de Matheron, atteint depuis longtemps, est le plus net.

DEUXIEME PARTIE

PROBLEMES GEOSTATISTIQUES

CHAPITRE V

L'ESTIMATION MINIERE

SOMMAIRE

Ce court chapitre sert d'introduction à la seconde partie. Il a pour but de définir comment apparaissent, vis à vis de la géologie mathématique, les problèmes d'estimations minières.

Le paragraphe 1 indique les trois hiérarchies de structures dont l'imbrication va créer tous ces problèmes. En premier lieu vient la superposition géologique des phénomènes de transition. Arrive ensuite la superposition des échelles technologiques minières, depuis le sondage jusqu'au gisement entier, et, enfin, la hiérarchie de l'intérêt économique des diverses questions. La qualité d'une prise au fond ne pose pratiquement aucun problème économique, alors que la détermination du nombre des sondages à fixer pour une campagne de prospection en est un.

Le paragraphe 2 donne un exemple du type de mélange des trois hiérarchies précédentes en essayant d'explicitier le concept de gisement, qui apparaît comme une série d'opérations technologiques réalisées sur la régionalisation.

Après avoir indiqué au paragraphe 3 quelques conséquences de cette définition, dont, entre autres, le plan de la seconde partie, on présente rapidement au paragraphe 4 une remarque sur le prolongement des problèmes géologiques et miniers au delà de la transition du gisement lui-même (provinces métallogéniques). Les problèmes envisagés dans ce texte ne dépasseront pas, néanmoins, l'échelle ultime du gisement pris dans son ensemble.

1. TROIS HIERARCHIES

La synthèse des problèmes d'estimation minière fait intervenir trois familles de structures, qui sont la régionalisation de l'espace minéralisé, les champs d'action technologiques, et les critères économiques. Ces trois groupes s'ordonnent intérieurement de façon hiérarchisée, en sorte que chaque niveau peut y être indépendant des échelons supérieurs, mais reste toujours lié aux niveaux qui le précèdent. Et les problèmes miniers naissent de l'entrelacs de ces trois structures.

1.1. GEOLOGIE

L'étude de la première famille a fait l'objet de notre première partie, et plus particulièrement des chapitres III et IV. On y a vu s'y déployer à des échelles de plus en plus amples une succession de phénomènes de transition emboîtés les uns dans les autres. Chacun d'eux fut mesuré dans un champ et pour un support donné, par un outil mathématique, toujours le même, le variogramme (plus exactement la fonction intrinsèque ou le covariogramme transitif ponctuel). Le choix de ce formalisme, qui a pu paraître arbitraire, va révéler ses raisons d'être dans l'application géostatistique, car il suffira à lancer les diverses passerelles depuis la géologie mathématique en direction de la technologie et de l'économie.

1.2. TECHNOLOGIE

Par technologie, nous n'entendons pas ici la nature des procédés d'extraction et d'enrichissement, mais plus simplement leur échelle,

c'est-à-dire le volume minéralisé qui les concerne, et le cas échéant leur cadence de production. Par exemple, si n est un chiffre quelconque, compris entre 1 et 10 :

un sondage	représente	10	n kilos
une volée	"	10^4	n kilos ou $10\ n$ tonnes
un chantier pendant un poste	"	10^3	n tonnes
un chantier pendant un mois	"	10^4	n tonnes
un quartier	"	10^6	n "
un siège d'extraction	"	10^7	n "
un bassin ferrifère	"	10^8	n "
une province ferrifère	"	10^9	n "

La taille des niveaux de technologie ne suffit pas à les caractériser géométriquement. Il faut aussi considérer leur forme et leurs dispositions mutuelles. La production mensuelle du chantier déchire la minéralisation de façon très irrégulière dans un dépilage, alors que le plan d'un quartier délimité par des tracés est décrit par un polygone assez simple en général. La disposition des sondages par rapport aux panneaux est souvent préférentielle (réseaux centrés, ou sondages d'angle) alors que la limite du gisement se place toujours de façon anarchique par rapport aux reconnaissances qui la recherchent. La distance d'un panneau au siège d'exploitation, elle aussi, présente de l'intérêt, et l'on peut condamner certaines zones relativement riches si elles ne paient pas leurs travaux d'approche.

En somme l'impact de la technologie, pour celui qui doit estimer un gisement est essentiellement de nature géométrique, et se ramène à la connaissance de la taille, la forme et l'implantation de toutes les unités à extraire.

1.3. ECONOMIE

La hiérarchie économique semble moins évidente, mais l'analyse du comportement des exploitants montre sa réalité. Au niveau de l'échantillonnage courant au fond, le mineur ne se préoccupe pas de rentabilité, mais désire simplement que le prélèvement qu'il effectue soit représentatif ; il demande donc au géostatisticien de lui définir les supports minimaux qu'on peut considérer comme valables.

A une échelle de reconnaissance supérieure, celle de la campagne de sondages, ou des traçages avec prises au fond, pour la prospection d'un quartier, l'aspect économique apparaît, mais reste limité. Le budget de la campagne est fixé à priori et l'on cherche à le ventiler au mieux à travers les différentes façons de procéder possibles (par exemple tracer beaucoup de galeries avec peu de prélèvements chacune ou au contraire une ou deux seulement très échantillonnées).

Les études économiques de ce genre supposent connue et déterminée la somme des dépenses d'exploitation, et la proportion de celles-ci réservée à la prospection. A un niveau plus élevé ces budgets eux-mêmes sont mis en question. Le rôle de l'étude économique s'étend alors. Elle doit, compte tenu des premières campagnes de reconnaissance qui ont assuré l'existence et la rentabilité du gisement, indiquer la répartition des dépenses à travers les diverses installations et travaux pour l'exploitation et le traitement du minerai d'une part, et à travers les compléments de prospection d'autre part, dépenses nécessaires pour éviter au mieux les risques de mauvais dimensionnements et cadences des unités de production.

Enfin, au niveau le plus général, on demande à l'étude économique de départager, à l'issue d'une première campagne de sondages, si l'on doit abandonner, créer un siège, ou poursuivre la reconnaissance préalable, dans le cas où la rentabilité ne semble pas assurée.

L'approche économique, par conséquent, se hiérarchise elle aussi, et il n'est pas nécessaire de développer les études les plus générales pour résoudre des problèmes locaux.

Voilà donc signalées ou rappelées très schématiquement les trois structures qui tout au long de cette seconde partie vont se confronter. La première notion créée par leur interférence est le concept primordial de gisement que nous allons maintenant regarder d'un peu plus près.

2. UN GISEMENT EST UNE OPERATION TECHNOLOGIQUE

En définissant un gisement minéral comme "toute masse minérale susceptible d'être exploitée" (E. Raguin 1949), le Professeur Raguin a évité de placer par trop l'accent sur son aspect d'anomalie de l'écorce terrestre, pourtant manifeste dans la majorité des cas.

En effet, en plus de tous les critères morphologiques du gisement, sa forme, sa profondeur, sa régularité, sa pente, sa tectonique, la nature des terrains qui l'encaissent, leurs duretés, etc... doivent intervenir pour le caractériser des familles de facteurs qui n'ont rien à voir avec la géologie.

La géographie physique et humaine seront parfois primordiales, et le climat, les moyens de transport, le niveau de technicité du pays,

imposeront leurs contraintes.

Les techniques métallurgiques doivent aussi être prises en compte. Une exploitation minière restitue très rarement à la vente, ou à l'usine intégrée, le minerai dans l'état physico-chimique où il a été extrait. Il est conditionné par des concassages, broyages, lavages, grillages éventuels, ou déjà transformé par agglomération. Cette prémétallurgie, plus ou moins poussée, est reliée organiquement à l'exploitation qui la précède.

La conjoncture économique enfin plante à chaque époque un réseau de marchés et de prix que l'exploitant ne peut pas déformer en général.

Toutes les contraintes sont très fortes et peuvent aboutir à des résultats géologiquement paradoxaux : c'est ainsi que l'une des sources de Mg activement exploitée est actuellement l'eau de mer où cet élément y est nettement moins abondant que dans la moyenne de l'écorce terrestre.

On comprend donc l'intérêt d'une définition aussi habile et aussi générale que celle de E. Raguin. Il lui correspond du reste tout un courant de pensée visant à séparer l'étude géologique en soi, de contexte technico-économique nécessaire, en estimations minières. Citons, en ce qui concerne l'école française, parmi tant d'autres, les travaux et les postulats méthodologiques de G. Matheron, Ph. Formery (1963), P. Routhier (1963), L. Pellissonnier (1962), F. Blondel, E. Ventura (1959), P. Lafitte (1957), L. Bubenicek (1965), etc... Le découpage de ce livre en deux parties - géologie mathématique et géostatistique - le situe exactement dans cette ligne de pensée, au style près, qui est ici résolument quantitatif et régionalisé. Mais cette approche "en style" va nous obliger à préciser dans le détail tous les concepts utilisés.

L. Bubenicek, par exemple, regroupe la connaissance détaillée des données géologiques, sous le nom de ressources du gisement. Ces ressources immuables à notre échelle, existent indépendamment de l'homme, la succession des campagnes de reconnaissance et d'exploitation les atteint par approximations successives. Vis à vis de ces ressources, il définit sous le nom de réserves la part exploitable à une époque donnée en fonction des multiples critères de coupure (teneurs limites pour les divers éléments, puissances limites, tonnages limités entre failles, profondeur ...) et il remarque que tous ces critères ne sont pas indépendants. Des liaisons existent entre teneurs et tonnages par exemple [F. Blondel (1956), S.G. Lasky (1950), F.W.J. Ross (1950), G. Matheron, Ph. Formery (1963)] .

Présenté dans un style qualitatif, ce plan de pensée nous semble irréprochable. Mais nous devons ici, au chapitre X, manier effectivement la notion de teneur de coupure, dans les problèmes d'économie minière, en vue de déterminer des cadences d'exploitation, des sommes à allouer aux campagnes de reconnaissances, etc... Nous ne pouvons pas échapper à une définition précise. Or, dire que l'on prend x pour teneur de coupure signifie que l'on décide d'abandonner les panneaux dont la teneur moyenne est inférieure à x , et d'exploiter les autres. Une telle notion n'a de sens que si l'on définit au préalable la taille des panneaux auxquels cette coupure s'appliquera, le niveau auquel s'opérera cette sélection : c'est-à-dire, en somme, si l'on a déjà défini le gisement. Le passage du qualitatif au quantitatif nous place devant une sorte de cercle vicieux.

La même difficulté apparaît à propos de la notion de tonnage $T(x)$ des réserves. A chaque teneur de coupure x supposée définie, on associe deux fonctions, le tonnage $T(x)$ et la teneur moyenne $m(x)$, l'une décroissante,

l'autre croissante. Si $T(o) = T_o$ désigne le tonnage du gisement entier (ressources), la différentielle $-\frac{dT(x)}{T_o}$ représente en pourcentage du tonnage total, le tonnage de minerai T_o de teneur comprise entre x et $x + dx$. On l'interprète parfois comme la densité de fréquence $f(x) dx$ de la distribution statistique des teneurs en fonction des tonnages. Cette interprétation nous renvoie à la même question que précédemment : de quelles teneurs s'agit-il ? $\frac{T(x)}{T_o}$ n'a pas grand'chose à voir avec la distribution cumulée des teneurs des échantillons prélevés. En effet, prenons un exemple.

Choisissons une couche entrecroisée du gisement de fer lorrain, la couche rouge en l'occurrence, de la mine M où les lentilles hectométriques sont particulièrement bien délimitées. Au vu des cartes, leurs teneurs en fer titrent à peu près 34 % et elles baignent dans une masse minéralisée de teneur moyenne 31 %. Superposées à cette régionalisation, les concrétions calcaires imposent une variabilité parasite des teneurs d'échelle métrique, de variance non négligeable, de l'ordre de 1 point². L'histogramme des mesures au fond de la concession met en évidence plusieurs modes (figure 1).

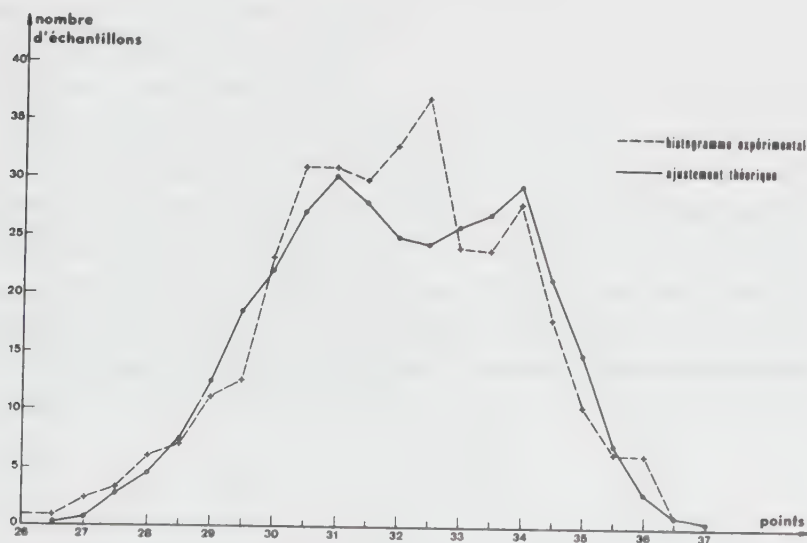


Fig.1-Histogrammes des mesures au fond de la couche rouge de la mine M.

A partir de ses deux extrémités, on peut tenter un ajustement à une somme de lois normales. Graphiquement, on a déterminé ainsi la fonction :

$$y = 0,67 y_1 + 0,33 y_2$$

ou y_1 est la loi normale de moyenne $m_1 = 31$ et d'écart type $\sigma_1 = 1,50$ et
ou y_2 est la loi normale de moyenne $m_2 = 34$ et d'écart type $\sigma_2 = 0,97$.

Or les deux variances σ_1^2 et σ_2^2 coïncident précisément avec les deux variances de saignées, dues au concrétionnement de la calcite soit dans les zones à 34 %, soit dans les zones à 31 % (cf. Chapitre VI). L'ajustement théorique de la figure V-1 ne rend pas compte du maximum à 32,5 points, qui doit correspondre à une autre lentille, moins riche et moins importante en extension (ou simplement au pourtour des lentilles riches), mais il montre tout de même très clairement comment se traduit l'influence de chacune des deux régionalisations, métrique et hectométrique sur l'histogramme des prélèvements. En particulier, si le support de ces prélèvements, plus large, avait amorti davantage l'amplitude de la structure métrique, si l'on avait par exemple considéré des volées au lieu de saignées, σ_1 et σ_2 auraient tendu vers 0, resserrant bien davantage l'histogramme autour des deux pôles à 31 et 34 %. Si, augmentant encore la taille du prélèvement jusqu'à la centaine de mètres on avait atteint la régionalisation hectométrique, les franchissements de frontières entre les deux types de lentilles seraient devenus fréquents et l'histogramme, primitivement resserré autour de ses deux maxima se serait réparti en un ensemble de valeurs intermédiaires. On voit donc qu'à chaque forme de support utilisé est associée une fonction de distribution statistique des teneurs (et par voie de conséquence des tonnages) bien particulière. La géostatistique permet le calcul des deux premiers moments, moyenne et variance, de chacune de ces fonctions à partir de la donnée du variogramme ponctuel et de la forme du support,

mais en général ne renseigne pas davantage sur le type de loi. Dans le cas très particulier d'une superposition de n régionalisations intrinsèques du type géométrique, d'échelles différentes, (cas de l'exemple cité un peu plus haut) chaque fois que les dimensions du support sont grandes vis à vis des portées $a_1 a_2 \dots a_i$ et petites vis à vis de $a_{i+1} \dots a_n$ l'histogramme des échantillons tend vers une répartition binomiale ; le reste du temps, il évolue de façon plus ou moins régulière entre ces niveaux de discontinuité. On peut seulement en dire que la variance en décroît quand la taille de l'échantillon augmente.

Les notions de teneur de coupure et de tonnage des réserves sont donc intimement liées à la taille des panneaux choisis. Comment réintroduire le concept de gisement compte tenu de cette remarque ? En fait, la dimension minimale des panneaux sélectionnés est une donnée, puisqu'elle résulte des caractéristiques technologiques du mode d'exploitation que l'on a retenu. Mais il reste un énorme arbitraire dans l'interprétation probabiliste de l'histogramme - $\frac{dT(x)}{T}$ comme densité de fréquence de la distribution statistique des teneurs en T_0 fonction des tonnages. Les postulats que sous entend cette définition consistent à considérer l'ensemble des panneaux, en nombre infini (c'est-à-dire dont les tracés se chevauchent) possédant les dimensions minimales imposées par la technologie du mode d'exploitation adopté et susceptibles d'être implantés dans l'espace minéralisé. On définit ensuite un procédé de tirage au sort donnant la même probabilité d'être choisi à chacun des panneaux. La teneur x du panneau choisi est alors une variable aléatoire possédant une certaine densité de probabilité $f(x)$. Mais la distribution cumulée $\int_x^\infty f(x) dx$ de cette variable pourrait très bien n'avoir qu'un lointain rapport avec $T(x)$. Lors de l'exploitation, le découpage n'est pas fait au hasard. Le choix du mineur intervient, sa connaissance de

l'environnement plus ou moins proche du panneau et le fait que les panneaux sont séparés et non superposés, leur distance au puits, etc... La définition $T(x)$ doit donc être associée plutôt à un projet d'exploitation qu'à un tirage au sort.

G. Matheron et Ph. Formery, à qui nous avons emprunté pour l'essentiel la critique précédente, proposent une définition ensembliste de la notion de gisement qui nous paraît la plus adaptée à des études quantitatives, en même temps qu'elle traduit beaucoup mieux la réalité concrète (G. Matheron, Ph. Formery, optimum dans la reconnaissance et la mise en exploitation des gisements miniers, Annales des mines Mai-Juin 1963). Leur façon de construire le concept de gisement peut être présentée comme suit.

Considérons, en premier lieu l'ensemble des partitions P_k réalisant le découpage de l'espace minéralisé en panneaux de taille égale ou supérieure à la limite technologique. Pour chaque partition P_k , la sélection des panneaux en nombre fini, de teneurs supérieures à x , définit une fonction $T_k(x)$, et conduit à un bilan d'exploitation possible $B_k(x)$. Pour chaque valeur de x , il existe une partition P_i pour laquelle ce bilan est maximal. L'indice i est une fonction de x , puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'une même partition P_i soit optimale vis à vis de toutes les coupures x . Par définition on posera $T(x)$ égal pour chaque valeur de x , à la valeur du $T_i(x)$ de la partition optimale P_i . De plus, la teneur de coupure x n'est sans doute pas, à elle seule, un critère de sélection satisfaisant. Un panneau isolé, à teneur supérieure à x , pourra être abandonné si son accès est trop onéreux. On doit donc généraliser la notion de teneur de coupure, liée directement au prix de vente de la tonne de minerai, et la remplacer par l'ensemble des conditions économiques du moment.

L'ensemble de toutes ces conditions (coût des transports au fond, creusement des galeries, prix de vente du minerai, etc...) est caractérisable par un seul paramètre b , exactement comme la teneur de coupure, dont la donnée condense tout un groupe de facteurs économiques (cours du marché, distance de la mine aux centres de production...).

A chaque partition P_k de l'espace minéralisé en N_k panneaux est associé un ensemble de $1 + C'_{Nk} + \dots + C_{Nk}^{Nk} = 2^{Nk}$ projets d'exploitation possibles, selon qu'on exploite tel ou tel groupe de panneaux parmi les N_k . De ces projets l'un, $S_i(b)$ est meilleur que les autres dans les conditions économiques du moment (i , et la partition optimale correspondante sont évidemment des fonctions de b). Le tonnage et la teneur associés à $S_i(b)$ définissent lorsque b varie, les fonctions $T(b)$ et $m(b)$ donnant, en fonction des conditions économiques, le meilleur tonnage et la meilleure teneur possibles. Par élimination de b , on obtient la relation $m = f(T)$ liant la teneur au tonnage.

C'est sur la relation $m = f(T)$, ainsi définie, que se fonderont les calculs économiques du chapitre X. Le paramètre "teneur de coupure", qui s'introduit nécessairement dans les équations de l'optimum joue exactement le rôle de la teneur de coupure envisagée ci-dessus : rien d'essentiel n'est changé. Il continue de vérifier la relation mathématique qui le définit :

$$m(x) \cdot T(x) = - \int_x^{\infty} x T'(x) dx$$

soit en différenciant :

$$(V.1) \quad x = \frac{d(m \cdot T)}{d T} = m + \frac{dm}{d \log T}$$

Dans le cas particulier où le seul critère économique est la teneur x , cette coupure, en plus de sa définition mathématique (V.1) reçoit un contenu physique supplémentaire : celui d'être le paramètre du choix de la partition optimale. Ace moment là elle peut apparaître comme notion première. Dans le cas général caractérisé par de multiples conditions économiques, x apparait comme une conséquence, et n'est plus défini que par (V.1).

3. CLASSIFICATION DES PROBLEMES GEOSTATISTIQUES USUELS

Sur le plan opératoire la définition du gisement, selon Matheron et Formery, oriente l'approche quantitative des problèmes d'estimation minière dans une direction radicalement différente que ne l'eut fait une interprétation probabiliste. Elle est beaucoup plus géométrique. L'étude de la distribution cumulée des panneaux de taille donnée, tirés au sort, poserait des problèmes ardues quant au passage d'une loi à une autre en fonction de la taille et de la forme du panneau, et les relations $m = f(T)$ possèderaient essentiellement un contenu algébrique. La relation tonnage-teneur, dans le cadre de la définition adoptée ici, représente simplement le résultat d'une méthode d'exploitation donnée lorsqu'on l'applique, dans le cadre de conditions économiques, à une régionalisation, c'est-à-dire à un phénomène naturel déterminé. A chaque point de la courbe $m = f(T)$ correspond non seulement une teneur moyenne et un tonnage du gisement défini en ce point, mais tout le projet d'exploitation, déployé à travers la régionalisation, qui a permis de construire le point considéré de la relation $m = f(T)$. On peut donc dire que pour une régionalisation donnée, il y a autant de gisements définissables que de points sur la

courbe $m = f(T)$, chaque gisement apparaissant comme l'opération technologique elle-même, la partition optimale de l'espace minéralisé.

En pratique, la relation fondamentale $m = f(T)$ ne sera pas connue, et l'on ne disposera que de l'information due aux sondages et aux premiers travaux miniers. Il apparaît donc comme objectif ultime, comme clé de voûte de la construction géostatistique d'estimer au mieux la relation $m = f(T)$ à partir des renseignements disponibles, et de tenir compte des erreurs qu'on a pu commettre dans l'élaboration de cette estimation pour la conduite des calculs économiques ultérieurs.

Cette démarche ultime sera présentée au chapitre X. On verra comment elle permet de diriger le choix des investissements dans les campagnes de reconnaissance, et la mise en place d'unités de production de dimensionnement optimal.

Mais on a vu que les problèmes économiques, et miniers, apparaissent en pratique comme hiérarchisés. En effet, lorsqu'un gisement est déjà exploité depuis un certain temps, le dimensionnement des installations et les cadences de production sont dans une large mesure déterminés, plus ou moins loin de l'optimum. De plus cet optimum risque de varier notablement avec la conjoncture économique. Dès lors, en plus de vastes réorganisations de nature stratégique qui apparaissent comme des options à long terme, et pour lesquelles les principes de calcul du chapitre X restent valables, on voit se dessiner une série d'objectifs tactiques, les plus fréquents en politique immédiate, à court et moyen termes. Les choses étant ce qu'elles sont, on a

néanmoins besoin de connaître ce que donnera l'exploitation de tel ou tel quartier, ou d'une mine entière, même si elle ne fonctionne pas dans ses conditions optimales. Et l'accroissement régulier des travaux de recherches impose que ces estimations soient reconduites périodiquement. Elles ne permettront plus de redémarrer le gisement - ou sa portion très locale considérée - suivant un autre plan, mais, en soi, sont indispensables pour prévoir les caractéristiques détaillées des paramètres qu'on va extraire, ou pour structurer de façon optimale des micro-campagnes de prospection. Cet objectif tactique sera traité dans les chapitres VII, VIII et IX. Le chapitre VII, relatif au krigeage, cherchera à déterminer le meilleur estimateur d'un panneau d'implantation donné, compte tenu des reconnaissances plus ou moins éloignées qui permettent d'avoir quelque idée sur lui. Le chapitre VIII s'intéressera, lui, au problème géométrique, celui de la frontière d'une zone minéralisée, et de la précision du tracé qu'on peut en dessiner. Le chapitre IX élargira le calcul des variances de krigeage, moyennant certaines approximations, aux variances d'estimation de gisement reconnues par un nombre relativement grand de sondages. Enfin, le chapitre VI, plus technologique encore, et totalement dépourvu d'arrière plan économique traitera le problème de l'échantillonnage des régionalisations de transition, c'est-à-dire du support à donner aux prélèvements pour court-circuiter les effets de pépité plus ou moins nocifs, problème en fait premier sur le plan des applications pratiques puisqu'il conditionne tous les autres.

En somme, le chapitre X reprend et prolonge tous les matériaux technologiques accumulés par ceux qui le précèdent. Mais en plus d'une montée vers les centres d'intérêt économiques, on verra se dessiner, à travers cette seconde partie, l'entrelacs des structures géologique et technologique. L'anisotropie du champ ne sera pas en général celle du panneau à estimer, et l'on devra transformer géométriquement le second pour pouvoir

le mesurer à l'aide des paramètres régionalisés du premier. Les mailles de sondage seront classées en plusieurs types selon leur position vis à vis du champ, et de la régionalisation dans son ensemble. La majeure partie des effets de pépite expérimentaux proviendra d'une discordance entre les caractéristiques géométriques du support, et les portées des phénomènes de transition superposés, etc... D'une manière générale, on peut dire que tous les problèmes miniers qui vont être évoqués apparaissent à la croisée d'une structure géologique et d'une géométrie minière et que de telles imbrications se retrouvent à toutes les échelles. Et ce sera là un autre fil conducteur de la seconde partie.

4. LES TRANSITIONS PLUS VASTES QUE LE GISEMENT

En guise de remarque, il convient de situer la présente étude, qui s'arrête à une échelle donnée, la régionalisation du gisement, par rapport aux analyses géologiques ou minières mettant en oeuvre des ensembles plus vastes.

Les provinces métallogéniques mériteraient d'être étudiées en tant que régionalisations. On peut même y voir, étant donné leur aspect très discontinu, un terrain de prédilection pour les analyses structurales à l'aide de variogrammes. Le formalisme resterait identique, voire simplifié dans la mesure où l'on assimilerait un gisement à une variable géométrique. C'est bien dans cet esprit que F. Blondel parlait, dès 1942, de répartitions en "constellation" des gisements, ou P. Laffite (1957), d'analogie avec la répartition des morilles dans un bois. Il est vraisemblable d'ailleurs qu'un bon

nombre d'échelles existe à ces niveaux, étant données les lois de distribution statistique des gisements qu'ont mis en évidence les travaux remarquables de T. Koulomzine et R.W. Dagenais au Canada en 1959 (lois normales) de M. Allais et F. Blondel (1956, 1957) (lois de Poisson), de L.B. Slichter (1960) (lois exponentielles) et de F. Derek (1963) (corrélations multiples). Ces distributions pourraient traduire l'existence de fonctions aléatoires de schémas booléens (lois exponentielles, cf. G. Matheron éléments d'une théorie du milieu poreux) ou de superpositions de schémas (lois lognormales et variogrammes de Wisjiens).

Mais l'analogie d'étude des provinces métallogéniques, et de leur au delà, avec ce qui a pu être esquissé ici, au chapitre III ou dans la deuxième partie, ne concerne que le mode d'approche analytique par variogrammes. La construction de fonctions aléatoires devient vite profondément différente de celle qui a été tentée au chapitre III, ne serait-ce qu'à cause de la dimension temporelle (époques métallogéniques) qu'on ne doit plus dissocier des répartitions spatiales. Enfin, les problèmes économiques comme les pose par exemple P. Routhier (1963) lorsqu'il se demande : "la recherche doit-elle être intensifiée au voisinage d'un gisement ou d'un groupe de gisements" ne seront pas du tout traités ici.

CHAPITRE VI

L'EFFET DE PEPITE

ET L'ECHANTILLONNAGE DES REGIONALISATIONS

SOMMAIRE

Après avoir présenté l'effet de pépite en termes miniers, le paragraphe 1 de ce chapitre le situe par rapport aux échelles technologiques vis à vis desquelles il risque de réagir et classe ces répercussions en deux groupes, selon que le support de l'échantillon destiné à la mesure de la régionalisation (échelles plus grandes que celle de l'effet de pépite) est lui-même grand ou non par rapport à la portée de la variabilité à petite échelle.

Dans le premier groupe interviennent les effets de pépite de nature granulométrique. On voit qu'ils se manifestent sur le plan macroscopique par des variances inversement proportionnelles aux volumes des prélèvements ; deux exemples illustrent cette étude, l'un emprunté à la métallographie, l'autre à la pétrographie. Le paragraphe se termine par une discussion, où il apparaît que, bien que les calculs de variance de pépite n'aient pas besoin de faire intervenir le concept de grain individualisé, on peut tout de même, à partir de cette notion, retrouver les lois des variances de pépites, déjà calculées dans des ouvrages classiques.

Le paragraphe 3 aborde avec l'effet de pépite de taille du support, le problème des montées à effectuer à partir de la variable ponctuelle pour avoir un échantillon suffisamment représentatif des régionalisations à grandes échelles, qui détruit au mieux la variabilité de pépite. Les calculs sont menés jusqu'au bout pour les formes de prélèvements miniers usuels (saignées, trous de mines, sondages, lames de parements, pointés quasi-ponctuels).

Enfin, à titre d'application, le paragraphe 4 définit les lois de l'échantillonnage des minerais lorrains en place, en les présentant sous forme de règles, de formules (formules de montée du paragraphe 3) et d'une norme choisie en fonction des besoins de krigeage.

1. L'EFFET DE PEPITE

1.1. Les degrés d'irrégularité d'une minéralisation

Dans une formation stratiforme telle que le gisement de fer lorrain, l'expérience minière montre que deux prélèvements en couche, bien faits, et réalisés au même endroit, à quelques dizaines de centimètres près, peuvent indiquer des teneurs voisines, comme aussi bien des teneurs notablement différentes. (Par prélèvement en couche, il faut entendre échantillon qui traverse du toit au mur toute la couche minéralisée, ou exploitée).

Voici par exemple (figure 1) la coupe stratigraphique et la teneur de trois sondages, alignés et distants d'un mètre cinquante, effectués dans la couche rouge du bassin de Landres-Ottange (mine de Moutiers). On y constate qu'effectivement la teneur en fer a varié considérablement à travers les trois mesures, alors que techniquement le carottage de ces sondages était parfait, et que géologiquement, il n'y avait aucune ambiguïté sur la définition ni du toit, ni du mur. Les analyses chimiques et les opérations de quartage, dont nous aurons l'occasion de reparler un peu plus loin, introduisent pour leur compte des erreurs d'un autre ordre de grandeur - des variances plus de dix fois plus petites - que la variabilité mise en évidence par ces trois sondages. Manifestement c'est bien la teneur vraie de chaque prélèvement en couche qui a évolué et elle a varié de 4 points, c'est-à-dire autant que variera la moyenne de ce groupe de trois sondages dans un rayon d'un kilomètre autour du prélèvement initial. Il apparaît là un phénomène très grave. Si la zone d'influence d'un échantillon n'excède pas un mètre de pourtour c'est toute l'estimation minière locale qui perd sa

Couche grise

Figure VI-1

Structure entrecroisée à concrétions calcaires

Paragénèse oxydée



signification. De plus, ce phénomène est non seulement important, mais fréquent. Les études de raccordement d'échelles d'Hayange portent sur des milliers de couples de mesures distantes de 50 centimètres ou d'un mètre, et mettent régulièrement en évidence cette variabilité parasite.

Une telle difficulté d'approche n'est pas spécifique au gisement lorrain. On la voit apparaître en métallogénie dans certains types de gisement de façon tellement marquée que des théoriciens comme STAMMBERGER ont été amenés à poser une distinction radicale entre les gisements "aléatoires", où les teneurs prises entre deux points, même très proches, resteraient stochastiquement indépendantes, et les gisements "réguliers", où elles varieraient dans l'espace de façon continue.

C'est à la géostatistique qu'il revient d'avoir jeté le pont entre les deux aspects aléatoires et réguliers de la réalité, en établissant toute une gradation entre ces deux extrêmes. Nous avons vu de façon descriptive au chapitre III combien en dehors du cas d'un tout petit nombre de variables à caractère géométrique (certaines puissances, par exemple) la continuité observée était souvent seulement une continuité "en moyenne", mais que en contrepartie, un effet de pépité, si prononcé soit-il était toujours accompagné d'une régionalisation sous-jacente, qui devenait apparente à grande échelle. Le formalisme des variogrammes a permis d'exprimer commodément toute la gamme des états compris entre le fonctionnel et l'aléatoire pur. Expérimentalement on a pu distinguer quatre types de comportements à l'origine, allant du variogramme deux fois dérivable à l'origine, au type purement aléatoire (figure II,3). A y voir de plus près, l'on s'est aperçu alors que les variogrammes à effet de pépité trahissaient l'existence de régionalisations d'échelles inférieures qui provoquaient une croissance extraordinairement rapide du $\gamma(h)$ à l'origine. Graphiquement, tout se passait

comme si $\gamma(h)$ ne partait pas de l'origine, mais d'un point de l'axe des ordonnées de valeur C_0 .

1.2. Effet de pépité et échelles technologiques

Envisagé d'un point de vue opératoire, l'effet de pépité apparaît extrêmement lié au problème de l'échantillonnage de la régionalisation car il permet de poser le problème du choix du support des prélèvements.

En effet, l'implantation d'un réseau de sondages dans un champ V fait intervenir trois ordres de grandeurs de distances, et l'on peut distinguer les dimensions de V lui-même, celles de la maille des prélèvements, et enfin celles de la taille des échantillons. Les ordres ne sont pas nécessairement les mêmes dans les différentes directions de l'espace : les formations stratiformes sont traversées de part en part par les sondages perpendiculaires aux plans des couches, en sorte que dans cette direction le support du prélèvement égale, par construction, celui du champ. Les plans de sondages rayonnants dans les formations en amas, ou les très longs carottages, peuvent eux-aussi, tendre vers l'ordre de grandeur de la taille du champ, ou de ses intersections par des plans parallèles. Il n'en demeure pas moins que le diamètre des sondages, leurs distances respectives, et les dimensions du volume minéralisé se situent à trois échelles.

Dans la suite, nous partirons systématiquement du variogramme ponctuel pour remonter aux divers supports. La longueur de ces supports et le nombre de dimensions de l'espace minéralisé pris à grande échelle apparaîtront par conséquent comme des facteurs seconds, qui s'introduisent en cours de calcul, la donnée de base, pour poser le problème de l'échantillonnage restant bien les trois niveaux d'hétérogénéité de la technologie minière.

Parallèlement à ces derniers, on doit placer la hiérarchie des régionalisations elles-mêmes. Elles se regroupent alors en trois types :

- a - les transitions T_A de portée petites vis à vis du support,
- b - les transitions T_B du même ordre de grandeur que lui,
- c - les transitions T_C grandes par rapport à l'échantillon, d'ordre de grandeur égal ou supérieur à la maille.

A partir de ces trois types élémentaires toutes les superpositions sont possibles. Un gisement d'or pépitique sans vaste régionalisation ne connaît que T_A , ou au contraire $T_A + T_C$ s'il est sous tendu par une structuration à grande échelle. Dans les minerais lorrains à concrétions calcaires T_A (échelle pétrographique), T_B (concrétionnements), T_C (échelles minières et hyperminières) existent conjointement ; dans les minerais lorrains argileux, il ne reste plus que T_A et T_C .

Lorsqu'on construit un variogramme pour déterminer T_C , les répercussions de T_A et T_B se traduisent exactement de la même façon, par une variance à l'origine $2 C_0$ qui regroupe la somme des deux série d'hétérogénéités.

1.3. Problème de l'échantillonnage d'une transition

Mais supposons maintenant qu'on ait besoin de réduire le C_0 global, en vue d'améliorer la qualité des estimations ; les procédés technologiques pour juguler les hétérogénéités T_A et T_B sont au contraire très différents et exigent qu'on étudie séparément les deux types d'effet de pépite.

Pourquoi et comment réduire C_o ? A vrai dire, la finalité du problème de l'échantillonnage des minerais en place n'est pas à chercher en lui-même, mais dans l'étude de l'estimation, de la variable régionalisée à partir d'un réseau de prélèvements fragmentaires. Ce problème, développé sous sa forme la plus générale, est celui du krigeage. Il sera traité au chapitre suivant, où l'on mesurera pleinement l'importance physique et les conséquences minières de l'effet de pépité. Mais de façon très intuitive, on comprend bien que la différenciation de l'importance de chaque échantillon, et la possibilité de connaître localement, de proche en proche, les caractéristiques moyennes de la régionalisation à partir du réseau des prélèvements s'estomperont au fur et à mesure que ceux-ci perdront leur auréole d'influence, c'est-à-dire que l'effet de pépité sera plus fort. Plus précisément, si C est la variance de T_C et C_o celle de $T_A + T_B$, il faudra que relativement à C , C_o n'ait pas trop d'importance, ou que le rapport :

$$\mathcal{E} = \frac{C_o}{C}$$

ne soit pas trop élevé. Or des deux facteurs définissant $\mathcal{E}$, C , bien que mesurable n'est pas modifiable. Quelle que soit la montée effectuée à partir du variogramme ponctuel, pour aboutir au support S_1 ou S_2 , du moment que, par définition de T_C , ces deux modes de prélèvements restent petits par rapport aux transitions de variance C , ils ne pourront pas réduire sa valeur numérique. Seul C_o , mesurable aussi, peut être modifié, puisque toujours par définition, chaque support S sera considéré comme une fonction de prélèvement de volume non nul par rapport à T_A et à T_B .

Ainsi, sans chercher pour le moment à connaître l'impact de $\mathcal{E}$ sur la qualité d'une estimation, nous nous poserons dans ce chapitre

le problème de l'échantillonnage dans les termes suivants :

Quel support faut-il attribuer à un prélèvement pour que le $\gamma(h)$ correspondant ait un paramètre C_0 (ou un rapport C_0/C) déterminé ?

On ne s'écartera pas, durant le chapitre, de ce plan technique. Il est peut-être plus rentable de multiplier des échantillons d'assez mauvaise qualité (ε grand), mais peu coûteux, plutôt que de se contenter de quelques prélèvements parfaits (ε nul). Mais cela est un autre problème (études pratiques Ch. IX).

Ici, le paragraphe deux traitera des rapports entre T_A et le support de l'échantillon : un cas particulier important est celui où T_B et T_C n'existent pas (ex : échantillonnage d'une roche d'un kilo ou deux à partir de lames minces) ; les régionalisations à très faible teneur (pépites) représentent un second cas particulier intéressant en pratique. On choisira pour l'illustrer, non plus un exemple pétrographique mais métallurgique, celui des inclusions non métalliques dans une section polie d'acier. Ces deux exemples seront précédés d'une partie théorique qui établira la relation de base entre les caractéristiques de la transition ponctuelle T_A et la variance C_0 .

Puis le paragraphe trois traitera des rapports entre T_B et le support de l'échantillon, avec pour illustration une vérification expérimentale de la montée à propos du minerai entrecroisé de Tucquegnieux. Après avoir rapidement passé en revue au paragraphe quatre les effets de pépite non régionalisés (erreurs de mesures), on concrétisera les résultats en terminant le chapitre par l'énoncé de règles d'échantillonnage des minerais lorrains en place.

2. EFFET DE PÉPITE GRANULOMÉTRIQUE

2.1. Effet de pépité et variances macroscopiques

On entendra par effet de pépité granulométrique celui correspondant aux transitions T_A , et l'on supposera dans ce paragraphe T_B inexistante. L'étude qui suit demanderait théoriquement à être présentée à l'aide de la théorie des distributions. Etant donné sa simplicité, on a adopté un mode d'exposé beaucoup plus classique.

Si l'on désigne par $E(r)$ l'échelon unité, défini par :

$$\begin{cases} E(r) = 1 & \text{pour } r > 0 \\ E(0) = 0 & \text{pour } r = 0 \end{cases}$$

Le demi-variogramme peut être séparé en deux composantes :

$$(VI, 1) \quad (r) = C_0 E(r) + \gamma_1(r)$$

La première composante, $C_0 E(r)$, représente l'effet de pépité à l'état pur, et la deuxième, $\gamma_1(r)$, qui est continue à l'origine, la régionalisation sous-jacente. Les variances et covariances, que l'on a besoin d'introduire, peuvent alors se calculer comme si la variable x à support ponctuel était la somme d'une variable régionalisée théorique x_0 , dépourvue d'effet de pépité,

$$(VI, 2) \quad x = x_0 + \alpha$$

obéissant à une loi de dispersion intrinsèque $\gamma_1(r)$ continue à l'origine, et d'une variable aléatoire pure α de variance C_0 et de moyenne nulle, les x_0 et les α étant indépendants, et les α affectés à deux points distincts,

même très proches, étant également indépendants. Si l'on se borne à étudier la variation de la teneur ponctuelle x dans le voisinage immédiat d'un point donné, c'est-à-dire si l'on ne considère que des valeurs petites de la distance r , $\gamma_1(r)$ varie très peu, de sorte que $\gamma(r)$ peut être regardée comme une constante égale à C_0 . Les variations observables localement sont dues presque exclusivement à α . C'est ce que nous exprimons en disant que la variable régionalisée se comporte localement comme une variable aléatoire. Mais à plus grande échelle, c'est-à-dire pour des valeurs plus grandes de la distance r , la croissance de la fonction intrinsèque continue $\gamma_1(r)$ ne peut plus être négligée, et la régionalisation de x_p se manifeste de façon sensible.

En réalité, l'échelon unité $\delta(r)$ ne représente pas de façon tout à fait satisfaisante l'aspect aléatoire local de la variation d'une teneur ponctuelle. En effet, à moins de supposer que la constante de pépite C soit infinie, le terme $C_0 \delta(r)$ perdrait toute influence sur la variance d'un échantillon de taille non nulle. Il s'élimine automatiquement dans l'intégration sur un support non ponctuel, conformément à la formule générale :

$$\sigma^2 = \frac{1}{V^2} \iiint_V dV_1 \cdot \iiint_V \gamma(r) dV_2 - \frac{1}{V^2} \iiint_V dV_1 \iiint_V \gamma(r) dV_2$$

On peut dire aussi que la valeur moyenne des variables aléatoires indépendantes α de variance finie contenues en nombre infini dans un support géométrique non ponctuel, a nécessairement une variance nulle. Il est clair que la notion de variable aléatoire pure à support ponctuel est dépourvue de signification physique. Le phénomène physique réel ne comportera jamais une véritable discontinuité à l'origine, mais une zone de transition rapide,

au voisinage immédiat de $r = 0$, dont la dimension sera de l'ordre de grandeur de la granulométrie. On est conduit à remplacer l'échelon unité par le schéma de Matheron $T(r, a)$ défini par :

$$(VI, 3) \quad \begin{aligned} T(r, a) &= \frac{3}{2} \frac{r}{a} - \frac{1}{2} \frac{r^3}{a^3} && \text{pour } r \leq a \\ T(r, a) &= 1 && \text{pour } r > a \end{aligned}$$

La constante a , ou portée, donne l'ordre de grandeur de la zone de transition c'est-à-dire le diamètre des grains. On représentera la fonction intrinsèque d'une teneur ponctuelle par une décomposition du type :

$$(VI, 4) \quad \gamma(r) = C_0 T(r, a) + \gamma_1(r)$$

où C_0 sera encore la constante de pépite, et $\gamma_1(r)$ une fonction intrinsèque continue à l'origine. La teneur ponctuelle x elle-même s'interprètera comme la somme :

$$(VI, 5) \quad x = x_0 + \alpha$$

de deux variables régionalisées indépendantes, x_0 et α , ayant comme demi-variogramme les fonctions $\gamma_1(r)$ et $C T(r, a)$. Mais cette fois, les α ne seront indépendants les uns des autres que pour des distances supérieures à la portée a . Aux distances inférieures à a , ils seront liés par un variogramme sphérique. Par suite, l'effet de pépite se répercutera sur les échantillons de taille v non nulle. Si v est plus grand que le volume a^3 des grains, la zone de transition va se trouver diluée dans le volume v , dans lequel le variogramme doit être intégré, et l'effet de pépite donnera naissance à une variance aléatoire additionnelle en $\frac{a^3}{v}$, c'est-à-dire inversement proportionnelle au nombre des grains prélevés, qui représentera l'effet de pépite à l'échelle macroscopique. En effet, si v et V désignent les volumes de l'échantillon et du gisement, la variance σ_p^2 due à l'effet de pépite, c'est-à-dire la variance dans V de la valeur moyenne dans v des α , se met sous la forme :

VI, 6)

$$\sigma_P^2 = \frac{C_o}{V^2} \iiint_V dV_1 \iiint_V T(r, a) dV_2 - \frac{C_o}{v^2} \iiint_V dv_1 \iiint_V T(r, a) dv_2$$

Si toutes les dimensions du support de l'échantillon sont grandes vis à vis de a , chacun des points intérieurs à v apporte à l'intégrale sextuple la contribution :

$$C_o \left[v - \frac{4}{3} \pi a^3 \right] + \frac{3}{2} \frac{C_o}{a} \int_0^a 4 \pi r^3 dr - \frac{1}{2} \frac{C_o}{a^3} \int_0^a 4 \pi r^5 dr = C_o \left[v - \frac{\pi}{6} a^3 \right]$$

ceci n'est vrai, en toute rigueur, que pour les points situés à une distance supérieure à a de la frontière de v . Mais, si $\frac{a^3}{v}$ est petit, on voit facilement que les points frontaliers n'interviennent que $\frac{a^3}{v}$ par des termes d'ordre supérieur. Avec cette approximation, on a alors :

$$\frac{C_o}{v^2} \iiint_V dv_1 \iiint_V T(r, a) dv_2 = C_o \left[1 - \frac{\pi}{6} \frac{a^3}{v} \right]$$

et une formule analogue pour l'intégrale étendue au gisement V . Il résulte de (VI, 6) que la variance de pépite a pour expression :

(VI, 7)

$$\sigma_P^2 = \frac{\pi}{6} C_o \left[\frac{a^3}{v} - \frac{a^3}{V} \right]$$

En pratique, $\frac{a^3}{V}$ sera le plus souvent négligeable, et la variance de pépite sera en a^3/v , c'est-à-dire en raison inverse du nombre de grains contenus dans l'échantillon. C'est là une circonstance très générale et très caractéristique. Chaque fois qu'il y a effet de pépite, c'est-à-dire chaque fois qu'une variable régionalisée présente un comportement aléatoire local, les échantillons macroscopiques sont affectés d'une variance additionnelle, dite variance de pépite, inversement proportionnelle à leur taille. La variance de ces échantillons apparaît comme la somme :

$$(VI, 8) \quad \sigma^2 = \sigma_P^2 + \sigma_\theta^2$$

de la variance de pépite, et de la variance théorique σ_θ^2 calculée à l'aide de la composante continue $\gamma_1(r)$ de la fonction intrinsèque et interprétée comme la variance de la variable régionalisée théorique x_θ de l'équation (VI, 5).

On peut appliquer les mêmes approximations pour calculer (VI, 6) quand le volume v de l'échantillon se réduit à une surface (ex : lame mince pour déterminer un bloc de minerai). Chaque point intérieur à la surface apporte à l'intégrale quadruple de (VI, 6) la contribution :

$$C_o \left[S - \pi a^2 \right] + \frac{3}{2} \frac{C_o}{a} \int_0^a 2 \pi r^2 dr - \frac{1}{2} \cdot \frac{C_o}{a^3} \int_0^a 2 \pi r^4 dr = C_o \left[S - \pi \frac{a^2}{5} \right]$$

En négligeant les effets de bords, il vient alors :

$$(VI, 9) \quad \frac{1}{S^2} \iint_S dS_1 \iint_S T(r, a) dS_2 = C_o \left[1 - \frac{\pi}{5} \cdot \frac{a^2}{S} \right]$$

On retrouve le développement (III, 17) du chapitre IV (fonction F pour un grand rectangle), arrêté cette fois-ci à son premier terme.

La variance d'une lame mince, ou d'une section polie, de taille S , dans un échantillon de volume V s'écrit :

$$(VI, 10) \quad \sigma_P^2 = \pi C_o \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{a^2}{S} - \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{V} \right]$$

Quelle que soit la loi de la variable x_θ la formule (VI, 8) reste vraie,

dès que les deux régionalisations qui se superposent sont indépendantes. Dans les chapitres suivants nous utiliserons constamment cette formule en calculant σ_{θ}^2 à partir du schéma de Matheron. Par contre, deux échantillons macroscopiques, pourvu qu'ils ne se coupent pas, ne présentent aucune covariance additionnelle, puisque leurs α , hors de portée, sont indépendants. Par suite, le demi variogramme expérimental, obtenu à partir d'échantillons macroscopiques, présentera, à l'origine, une discontinuité égale à la variance de pépite σ_P^2 , calculée ci-dessus.

Illustrons les formules (VI, 7) et (VI, 10) par deux exemples, empruntés le premier à la métallographie, le second à la pétrographie.

2.2. Application à la métallographie

Le lecteur s'étonnera peut-être qu'au milieu d'applications minières vienne s'insérer un exemple emprunté à la métallographie. En fait, nous le reproduisons, en plus de son intérêt pratique évident, pour présenter un problème d'oligoéléments, analogue à celui des pépites d'or, qu'on aurait du mal à trouver dans la pétrographie d'un minerai lorrain. Nous l'exposons aussi pour pouvoir, au moins une fois dans ce texte, discuter un phénomène spatio-temporel, et saisir les analogies entre les régionalisations de l'espace et celle du temps.

Il se développe à l'heure actuelle une tendance qui cherche à rendre quantitatives les descriptions et les mesures d'inclusions non métalliques dans les aciers. Des études récentes effectuées à l'Institut de Recherches de la Sidérurgie (J. J. Gauthier, A. Hettler, A. Haas, J. Serra) ont exploité dans ce domaine le potentiel descriptif du variogramme, d'une manière

semblable à celles entreprises ici au chapitre III, en pétrographie. Nous n'en parlerons pas davantage. Indépendamment de ces études de forme, avec la quantification ont pu être précisés certains problèmes, comme celui de la détermination de la taille que doit avoir une section polie pour représenter correctement le bloc d'acier d'où elle est prélevée.

Considérons par exemple la section dont on a photographié une partie dans la figure (VI, 2).

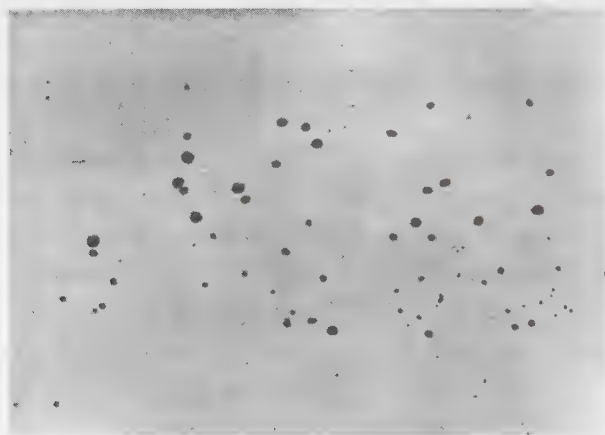


figure VI - 2 inclusions d'oxydes
dans un acier - grossissement 500

La régionalisation est isotrope. Le pourcentage y est de $p = 20 \cdot 10^{-4}$ et le variogramme, assimilable à un schéma de Matheron, a pour portée $a = 8 \cdot 10^{-4}$ cm. Si ρ est le poids spécifique des inclusions et ρ_0 celui de l'acier, la teneur pondérale a pour valeur :

$$t = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot p = \frac{1}{4} p \quad (\rho \sim 2 \text{ et } \rho_0 \sim 8)$$

et la variance C_0 du variogramme ponctuel

$$(VI, 11) \quad C_0 = t(1-t) \sim t = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot p = \frac{1}{4} \cdot p$$

Appliquons (VI, 10) il vient :

$$(VI, 12) \quad \sigma_P^2 = \frac{\eta}{5} C_0 \left[\frac{a^2}{S} - \frac{5}{6} \frac{a^3}{V} \right] \sim \frac{\eta}{5} \cdot \frac{64 \cdot 10^{-8}}{S} \cdot \frac{1}{4} \cdot 20 \cdot 10^{-4}$$

On peut considérer que la loi binominale ponctuelle tend, pour un champ aussi grand que la section, vers la loi normale de moyenne t et de variance σ_P^2 (ce qui supposerait en toute rigueur un variogramme d'échelon unité, mais étant donné la dimension de a par rapport à S , la loi limite reste pratiquement normale). D'autre part, on voit sur (VI, 12) que le terme en $\frac{a^3}{V}$ est négligeable pour des volumes courants de quelques cm^3 . Si l'on impose à la teneur estimée t^* d'être reconnue à dix pour cent, c'est-à-dire que :

$$t(1 - 0,05) < t^* < t(1 + 0,05)$$

il vient, au risque d'erreur classique de 0,5 pour cent :

$$(VI, 13) \quad \frac{\sigma_P}{t} = 2,5 \cdot 10^{-2}$$

(VI, 12) et (VI, 13) entraînent :

$$(VI, 14) \quad \left(\frac{\sigma_p}{t} \right)^2 = \frac{\tilde{H}}{4} \cdot \frac{a^2}{S} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \cdot \frac{1}{p}$$

soit numériquement :

$$S \sim 2 \text{ cm}^2$$

Ce résultat appelle quelques remarques :

a) La référence au schéma de Matheron suppose que les inclusions sont sensiblement de même taille et indépendantes les unes des autres : il arrivera que ce ne soit pas tout à fait le cas, soit que ou bien deux populations granulométriques soient en présence, ou bien des amas d'inclusions se manifestent. Dans chacune de ces hypothèses, on devra adopter un autre schéma ; en pratique on se contentera de la somme de deux schémas de Matheron, l'expérience montre qu'elle rend assez bien compte de ce genre de régionalisations :

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= C_1 \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a_1} \right)^3 \right] + C_2 \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a_2} \right)^3 \right] && \text{pour } r < a_1 \leq a_2 \\ \gamma(r) &= C_1 + C_2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{r}{a_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a_2} \right)^3 \right] && \text{pour } a_1 < r \leq a_2 \\ \gamma(r) &= C_1 + C_2 && \text{pour } r > a_2 \end{aligned}$$

Dans ces conditions (VI, 14) s'écrit :

$$(VI, 15) \quad \left(\frac{\sigma_p}{t} \right)^2 = \frac{\tilde{H}}{4} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \cdot \frac{1}{S \cdot p^2} \left[a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 \right]$$

On voit sur (VI, 15) que seul le groupement $a_1^2 p_1$, ou $a_2^2 p_2$ possède une réalité physique pour caractériser macroscopiquement les

régionalisations des inclusions, et que la variance croît comme le carré de la portée. Toujours dans (VI, 15), on aurait pu attribuer à p_1 et p_2 deux types d'inclusions différents (oxydes et sulfures par exemple), la formule précédente supposerait alors leurs régionalisations indépendantes (il faudrait sinon rajouter un terme relatif au covariogramme rectangle, selon II, 42). La taille minimale de la section n'est pas la même selon qu'on ne cherche que les oxydes, que les sulfures, ou les deux à la fois.

b) Les formules (VI, 12) (VI, 14) et (VI, 15) sont relatives aux variances des sections elles-mêmes, qu'on pourrait tailler à travers le bloc, supposé régi par la loi intrinsèque qu'on utilise. Elles ne traitent pas du second problème celui de l'estimation, sur une section donnée, des teneurs ou inclusions mesurées à partir d'un échantillonnage par points (analyseur de textures) ou par spots circulaires (charte de Jernkantor). C'est là une autre question de formalisme identique à celui de l'estimation par termes de lignes et de tranches (chapitre IX). En définitive, on devra ajouter les deux variances d'estimation des pointés dans la section, et de la section dans le volume pour connaître la précision de la mesure expérimentale (cf. formule de Krige).

c) On a vu, dans l'écriture (VI, 12) que le terme en $\frac{a^3}{V}$ pouvait être négligé. Ceci veut dire que quel que soit le volume du bloc d'acier, dès qu'il dépasse l'ordre de grandeur du centimètre cube, la taille de la section reste la même. En réalité, dès que le volume de l'échantillon est un peu plus grand, l'influence de la régionalisation de x_θ (VI, 5) commence à se montrer. L'on doit considérer ici x_θ comme une variable à quatre dimensions, la quatrième étant le temps. On ne pourra pas connaître directement la composante

temporelle de l'effet de pépite ; mais plutôt celle de x_0 , en prélevant au même endroit à des instants régulièrement espacés, un échantillon ; de même, la composante spatiale de x_0 apparaîtra au travers de prélèvements simultanés du bain ou de la masse d'acier. Si les propriétés statistiques de x_0 dépendent surtout du temps, on aura affaire à une anisotropie zonale de type temporel, (ex : dissolution ou précipitation sans déplacement) si elles ne dépendent que de l'espace (ou de certaines de ses directions), on aura affaire à une anisotropie zonale de type spatial (ex : déplacement de solides à flux constant dans le temps) ; de la même façon, le phénomène pourra relever des deux types transitif et intrinsèque selon le ou les axes de coordonnées considérés (ex : influence des parois dans un réacteur thermique en régime permanent, ou au contraire régime d'établissement dans un réacteur suffisamment grand et homogénéisé pour être considéré comme spatialement intrinsèque).

Enfin, x_0 pourra être suffisamment continue pour le recours à son étude par la théorie des variables régionalisées ne soit pas nécessaire. Dans tous les cas, il est inutile, si on ne rencontre pas d'autres régionalisations que l'effet de pépite et x_0 , de prélever des volumes et des surfaces plus grands que ceux déterminés par (VI, 7), (VI, 12), (VI, 14), et (VI, 15).

2.3. Effet de pépite pétrographique

Nous n'avons considéré dans l'exemple précédent, qu'un seul ou deux types de grains, indépendants l'un de l'autre, et plongé dans une gangue de teneur nulle. C'est le cas des éléments pétrographiques lorsqu'on s'intéresse aux teneurs en leurs propres phases. Mais on peut aussi bien porter son attention sur un paramètre dérivé, qui se manifeste plus ou moins

à travers chacune des phases. Le fer du minerai lorrain se trouve dans les oolithes, comme dans les ciments chloriteux, limonitiques ou argileux, dans la sidérose, . . . , étant bien entendu que chacune de ces phases possède, à l'échelle pétrographique, une teneur en fer uniforme bien déterminée. Pour calculer la variance de pépite des teneurs ponctuelles en fer d'un échantillon de ce minerai, nanti de ces constituants pétrographiques imbriqués les uns dans les autres, il faut maintenant faire appel à la théorie des corégionalisations exposée au chapitre II. Adoptons pour notations :

$$(VI, 16) \quad \text{teneur volumétrique ponctuelle en fer } x(h) = \sum_1^n x_i p_i(h)$$

ou les $p_i(h)$ sont les fonctions caractéristiques des n constituants pétrographiques, et les x_i leurs teneurs volumétriques ponctuelles en fer. La matrice de codispersion Γ (chapitre II - paragraphe 11) a pour éléments les covariogrammes intrinsèques :

$$(VI, 18) \quad \gamma_{ji}(h) = \gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E \left[p_i(d+h) - p_i(d) \right] \left[p_j(d+h) - p_j(d) \right]$$

pour i et j variant de 1 à n . Compte tenu de (VI, 17) les paliers de ces covariogrammes $\gamma_{ij}(h)$ sont :

$$(VI, 19) \quad \begin{aligned} C_{ii} &= \sum_{i=1}^n \bar{p}_i (1 - \bar{p}_i) \\ C_{ij} &= \sum_{i=1}^n - \bar{p}_i \bar{p}_j \end{aligned}$$

où $\bar{p}_i$, moyenne de $p_i(h)$, est la proportion de la phase i dans la régionalisation.

La fonction intrinsèque de la variable x (VI, 16) s'exprime à l'aide des coefficients de la matrice de codispersion suivant l'expression :

$$(VI, 20) \quad \gamma_x(h) = \sum_{i=1}^{i=n} \cdot \sum_{j=1}^{j=n} x_i x_j \gamma_{ij}(h)$$

L'opérateur de variance calculé en (VI, 6) et en (VI, 7) étant linéaire par rapport à la fonction intrinsèque $\gamma_x(h)$, la variance à priori d'un échantillon de volume v s'écrit, compte tenu de (VI, 19) et (VI, 20) :

$$(VI, 21) \quad \sigma_P^2 = \frac{1}{6} \frac{\gamma'}{v} \cdot \left[\sum_{i=1}^n \bar{p}_i x_i^2 a_{ii} - \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \bar{p}_i \bar{p}_j x_i x_j a_{ij}^3 \right]$$

où a_{ij} est la portée du covariogramme $\gamma_{ij}(h)$.

La formule (VI, 21) est assez peu maniable. Or pratiquement une portée à moyenne est amplement suffisante. D'après (VI, 20), on pourrait calculer cette portée en pondérant les a_{ij} par les produits $x_i x_j C_{ij}$. Expérimentalement on procédera en traçant graphiquement le $\gamma_x(h)$ par sommation des termes $\gamma_{ij}(h)$, selon (VI, 20), et on ajustera la portée moyenne a sur la courbe ainsi obtenue. Cela revient à émettre l'hypothèse que tous les constituants en présence ont sensiblement la même taille, donc la même traversée moyenne a . Dans ces conditions (VI, 21) se simplifie et s'écrit :

$$(VI, 22) \quad \sigma_P^2 = \left(\frac{1}{6} \frac{a^3}{v} \right) \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \bar{p}_i \bar{p}_j (x_i - x_j)^2$$

En particulier, s'il n'y a que deux constituants en présence, comme des concrétions calcaires et du minéral interconcrétions, la portée a est unique - sans approximation - le terme $\frac{a^3}{6}$ représente le volume moyen u des concrétions, et σ_P^2 s'écrit :

$$(VI, 23) \quad \sigma_P^2 = \frac{u}{v} (x_1 - x_2)^2 \bar{p}_1 \bar{p}_2$$

où x_1 et x_2 sont les teneurs volumétriques en fer des concrétions et du minéral interconcrétions, et $\bar{p}_1$ et $\bar{p}_2$ les proportions de ces deux constantes.

Toutes les variances (VI, 14) à (VI, 23) ont été établies relativement à des teneurs volumétriques. Pour passer aux variances des teneurs pondérales correspondantes, il suffit de les diviser par ρ_o^2 , carré du poids spécifique moyen du minéral. Appelons t_i la teneur pondérale du constituant de teneur volumétrique x_i et de poids spécifique ρ_i , il faut donc remplacer chaque terme x_i par $(\frac{\rho_i}{\rho_o}) t_i$ dans les formules correspondantes.

Ecrivons les correspondants de (VI, 22) et (VI, 23) :

$$(VI, 25) \quad \sigma_{P'}^2 = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{v} \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j \left[\frac{\rho_i}{\rho_o} t_i - \frac{\rho_j}{\rho_o} t_j \right]^2$$

$$\sigma_{P'}^2 = \frac{u}{v} \left(\frac{\rho_1}{\rho_o} t_1 - \frac{\rho_2}{\rho_o} t_2 \right)^2 \bar{p}_1 \bar{p}_2$$

Par un raisonnement analogue, on établit aussi bien la variance d'une lame mince L dans un échantillon de volume v :

$$(VI, 26) \quad \sigma^2 (L/v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n p_i p_j \left(\frac{\rho_i}{\rho} t_i - \frac{\rho_j}{\rho} t_j \right)^2 \frac{\tilde{u}}{5} \left(\frac{a^2}{S} - \frac{5a^3}{6v} \right)$$

(formule établie en adoptant une portée moyenne).

Application numérique

Prenons l'exemple pétrographique suivant : une régionalisation possède trois constituants oolithes, chlorite et quartz, dans les proportions ci-dessous. On choisira comme portée la valeur de 150 microns du covariogramme

oolithes-chlorite parce qu'elle a de loin le poids le plus important dans (VI, 20) et parce qu'elle est la plus grande en valeur absolue (l'erreur commise en assimilant les autres a_{ij} à celui-ci ira dans le sens de la sécurité).

Les paramètres sont les suivants :

	Proportion	Poids spécifique	Teneurs pondérales	Produit $\rho_{ii} t_i$
Calcite + Quartz	$p_1 = 11 \%$	$\rho_1 = 2,7$	$t_1 = 0$	0
Oolithes	$p_2 = 66 \%$	$\rho_2 = 3,8$	$t_2 = 52$	$\rho_2 t_2 = 198$
Chlorites	$t_3 = 25 \%$	$\rho_3 = 3,3$	$t_3 = 32$	$\rho_3 t_3 = 106$

le poids spécifique moyen est $\rho = \sum \rho_i p_i = 3,55$

la teneur moyenne est $t = \frac{1}{\rho} \sum \rho_i t_i p_i = 43 \%$

(l'analyse à petite échelle a porté sur une zone riche comprise entre deux lits calcaires).

l'expression $\sum_i \cdot \sum_{j>i} \cdot \frac{p_i p_j}{2} (\rho_{ii} t_i - \rho_{jj} t_j)^2 = 350 \text{ points}^2$

L'habitude veut qu'on raisonne en termes de variance absolue et non de variance relative en ce qui concerne les analyses chimiques de

minerais (du fait qu'il ne s'agit pas d'oligo-éléments). Les analyses chimiques du fer sont définies avec un écart type de 0,1 point. Utilisons aussi cette précision pour déterminer la surface d'une lame mince. (VI, 26) s'écrit :

$$0,01 = 351 \cdot \frac{\pi}{5} \cdot \frac{2,25 \cdot 10^{-4}}{S}$$

d'où $S = 2,2$ centimètres carrés.

A nouveau on doit formuler certaines remarques de l'exemple métallographique. Si l'estimation des pourcentages sur la lame mince donne lieu à des repérages à maille régulière, il faut rajouter à la variance de 0,01 point² de la lame dans le bloc, celle de l'estimation proprement dite (cf. ch. IX L'estimation par termes de lignes et de tranche). D'autre part, on a négligé l'importance des régionalisations d'échelle supérieure ; manifestement ici la succession des lits calcaires et minéralisés, qui joue à l'échelle centimétrique doit intervenir, par un calcul analogue au précédent (les effets de pépite s'ajouteront).

On pourrait aussi calculer la variance du volume minimal à broyer à la maille de libération des constituants pour disposer d'une quantité de matière suffisante pour l'analyse chimique. Si l'on entend par "maille de libération des constituants", le résultat d'un broyage qui restitue des blocs de portées égales à celles des covariogrammes la formule (VI, 24) est immédiatement applicable et pour la même variance de 0,01 point², donne :

$$0,01 = 351 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{3,75 \cdot 10^{-6}}{v}$$

d'où $v = 96,5$ millimètres cubes.

Il suffit maintenant de ne prélever qu'un dixième de centimètre cube du matériau broyé et homogénéisé.

2.4. Grains individualisés et effet de pépite

L'échantillonnage des grains a fait l'objet de nombreuses études, tant sur le plan théorique qu'expérimental. On peut citer, parmi bien d'autres, les travaux de F. BASTENAIRE sur les fractions granulométriques, (1963), plus récemment l'ouvrage fondamental de P. GY sur l'échantillonnage des minerais en vrac (1966), et en ce qui concerne les erreurs d'analyse et de prélèvement des roches en place, celui de P. LAFITTE (1957).

Si l'on situe l'approche géostatistique par rapport à ces démarches, on doit noter à la base deux différences fondamentales. Tout d'abord, les formules classiques supposent implicitement le gisement aléatoire, c'est-à-dire dépourvu de méga-régionalisation. Cette hypothèse, nous l'avons admise aussi pour conduire les calculs précédents, mais en sachant que la présence des vastes régionalisations se traduisait par l'addition pure et simple d'un terme supplémentaire aux variances de pépite. Ces formules, comme celles de P. LAFITTE, restent donc parfaitement utilisables, il suffira de rajouter les variances d'échantillonnage qu'elles définissent aux variances d'extension à grande échelle, quand ce sera nécessaire.

De plus, ces démarches font explicitement appel à des grains. Pour les roches en vrac, c'est là le seul concept qu'on ait à sa disposition puisque le phénomène est par définition découpé en fragments. Le grain est même souvent considéré comme la seule réalité régionalisée, au point que P. GY, n'hésite pas à proposer des formules correspondant à des modes de

prélèvements équiprobables, où tous les échantillons possibles de même effectif n sont supposés avoir la même probabilité d'être tirés, ce qui revient exactement à considérer comme négligeables, du point de vue opératoire, les régionalisations interfragments. D'autre part, chaque fragment étant pris en entier ou pas du tout, il n'est pas nécessaire pour l'échantillonnage global de connaître les lois de son hétérogénéité interne : par construction les supports coïncideront avec les frontières des blocs. Ce qui peut paraître comme une simplification, puisque toute régionalisation est supprimée, pose en retour des problèmes extrêmement délicats. La montée suivant une configuration géométrique élémentaire, indépendante de la régionalisation, est relayée par le calcul de la variance d'un échantillon d'effectif donné, ou de poids donné, de support aléatoire, incomparablement plus compliqué que le simple volume cylindrique d'un sondage. Aussi bien la construction d'une théorie de l'échantillonnage des minerais en vrac a posé des problèmes bien spécifiques. Nous nous contenterons ici de chercher à rejoindre son point de vue, ou celui des mesures en place de grains individualisables, à partir de l'optique régionalisée de l'effet de pépite, dans un cas particulier extrêmement simple.

En pétrographie régionalisée, la définition d'une granulométrie n'est pas évidente. Les oolites en place peuvent passer effectivement pour des grains, la calcite déjà beaucoup moins (la recristallisation lui donne des formes enchevêtrées assez complexes) et le ciment de chlorite plus du tout. Le concept de forme, en général, et de granulométrie en particulier a dû être repensé et fait l'objet d'études récentes (G. MATHERON - J. SERRA), mais il n'est pas nécessaire pour l'établissement d'une variance de pépite, et des formules du type (VI, 21) ne demandent que la connaissance de la matrice de codispersion, et le choix d'un modèle pour chacun de ses termes.

Nous procéderons beaucoup plus sommairement en reprenant les conditions de l'exemple métallographique : un seul type de grain, sensiblement de même taille, et en faible proportion, plongé dans une gangue de teneur nulle. Les résultats seront ensuite généralisés aux fortes teneurs et à la granulométrie variable. On adoptera à priori la proportionnalité entre le cube de la portée et le volume moyen d'un grain, le coefficient de proportionnalité variant avec le schéma géostatistique choisi. Nous raisonnerons sur des teneurs volumétriques, ou poids métal au mètre cube. Une teneur volumétrique ponctuelle ne peut prendre que deux valeurs : 0, s'il s'agit d'un point non minéralisé, ou ρ , poids spécifique des grains, si le point tombe à l'intérieur d'un grain. Reprenons les notations suivantes :

Q	tonnage métal du gisement,
$T = \rho_o V$	tonnage minéral du gisement,
V et ρ_o	volume et poids spécifique du gisement,
u et $g = \rho u$	le volume et le poids d'une pépite,
p	volume partiel occupé par les pépites.

Par la suite, on utilisera la relation (schéma de Matheron)

$$(VI, 27) \quad u = \frac{\pi}{6} a^3$$

dont la signification physique est évidente^{*}. Pour calculer C_o variance des teneurs ponctuelles, on notera que, dans le volume total V , les pépites, au nombre de :

$$K = \frac{Q}{g}$$

occupent un volume partiel :

$$p = Ku = \frac{Q}{\rho}$$

^{*} C'est le volume de la sphère de diamètre a

Les fréquences des teneurs ρ et 0 sont donc, respectivement $\frac{Q}{V}$ et $1 - \frac{Q}{V}$. On en déduit immédiatement la moyenne et la variance des teneurs volumétriques ponctuelles x :

$$(VI, 28) \quad \bar{x} = E(x) = \frac{Q}{V}$$

$$C_o = D^2(x) = \bar{x} (\rho - \bar{x})$$

En général, $\bar{x}$ sera négligeable devant ρ et on prendra :

$$C_o = \rho \bar{x}$$

Par suite, la variance de pépite affectant un échantillon macroscopique de volume v , compte tenu de (I, 7) et (I, 9), a pour valeur :

$$(VI, 29) \quad \sigma_P^2 = \bar{x} \left[\frac{g}{v} - \frac{g}{V} \right]$$

g étant le poids d'un grain. Pour passer des teneurs volumétriques x aux teneurs pondérales t , plus usuelles, on doit prendre :

$$x = \rho_o t$$

$$\sigma_x^2 = \rho_o^2 \rho_t^2$$

Désignons par $m = \frac{Q}{T} = \frac{\bar{x}}{\rho_o}$ la teneur pondérale moyenne du gisement.

On déduit immédiatement de (VI, 29) la variance de pépite $\sigma_{P'}^2$, qui affecte les teneurs pondérales :

$$(VI, 30) \quad \sigma_{P'}^2 = \frac{mg}{\rho_o v} = p \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^2 \frac{u}{v}$$

Le raisonnement aléatoire classique conduit à la même expression - ce qui constitue une justification de la relation (VI, 27) que nous avons posée à priori. En effet, chacun des $K = m \frac{\rho_0 V}{g}$ grains contenus dans le gisement a la même probabilité $\frac{v}{V}$ d'être^g contenu dans v . Le nombre k de grains contenus dans v a pour variance :

$$K \frac{v}{V} \left(1 - \frac{v}{V} \right) = m \frac{\rho_0 v}{g} \left(1 - \frac{v}{V} \right) \sim m \frac{ov}{g}$$

On passe de ce nombre k à la teneur pondérale y en crivant :

$$y = \frac{kg}{\rho_0 v}$$

et on voit que la variance de y est bien donnée par (VI, 30).

Le raisonnement aléatoire classique présuppose que chacun des k grains a la même probabilité $\frac{v}{V}$ d'être contenu dans v . En fait, cette probabilité diffère d'autant plus du rapport $\frac{v}{V}$, par valeurs inférieures, que le nombre n des k grains présents à l'instant où l'on plante le n plus-unième est plus élevé. Elle en diffère d'autant plus, d'autre part, que la taille de chaque grain est grande. Aussi doit-on la considérer comme formule asymptotique, valable quand m , teneur pondérale moyenne du gisement tend vers 0. Mais dans ces conditions, elle permet de justifier la relation (VI, 27) qui donne un contenu physique à la portée a , relation qui restera vraie, même lorsque m ne sera plus infiniment petit. Dans ce dernier cas, le raisonnement qui nous a permis d'établir les équations (VI, 28) et (VI, 29), reste vrai, et l'expression plus générale σ_P^2 , variance

des teneurs pondérales devient :

$$(VI, 31) \quad \sigma_P^2 = m \left[\frac{\rho}{\rho_0} - m \right] \frac{u}{v} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 (p) (1-p) \frac{u}{v}$$

où m est la teneur pondérale du gisement, ou de la partie de celui-ci supposée intrinsèque, p la proportion de pépites, $\frac{u}{v}$ le rapport des volumes d'un grain et de l'échantillon, et $\frac{\rho}{\rho_0}$ le rapport des poids spécifiques des grains et du gisement. (VI, 31) reste vraie quelle que soit la fréquence p des pépites.

Nous avons supposé celles-ci homogranulaires. En général, ce ne sera pas le cas, et elles auront des volumes u_i variables. Au niveau macroscopique, on obtient facilement la variante de pépité, en remarquant que chaque grain u_i apporte au σ_P^2 une contribution égale à $\frac{\rho}{\rho_0} p (1-p) \frac{u_i}{v}$ affectée d'un coefficient de pondération qui n'est autre que le volume u_i du grain lui-même. On a donc :

$$(VI, 31) \quad \sigma_P^2 = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) p (1-p) \frac{U}{v}$$

$$U = \frac{\sum_i u_i^2}{\sum_i u_i}$$

U est la moyenne des volumes des grains, lorsque les fréquences dans les classes granulométriques sont comptées en volumes, et non en nombre de grains, et se déduit de la moyenne $\bar{u}$ et de la variance σ_u^2 numériques par la relation :

$$u = \frac{\sigma_u^2}{\bar{u}} + \bar{u}$$

Les formules que l'on trouve dans les travaux précédemment cités sont, effectivement, de ce type. On observera qu'elles ne tiennent pas compte d'une corrélation possible entre teneurs et granulométrie. Il arrivera souvent que les pépites soient plus grosses, en moyenne, là où elles sont plus nombreuses et où la teneur m est plus élevée. Cette corrélation positive doit avoir pour effet de majorer la variance de pépité.

On pourrait la calculer à partir de la covariance granulométrie/teneur. Remarquons enfin que l'opération de pondération par les volumes des grains revient à changer de schéma ou plus exactement de portées pour le même schéma et à prendre un modèle géostatistique moyenne des modèles élémentaires. Dans le même ordre d'idées, on notera qu'en adoptant pour le ciment chloriteux un modèle du type schéma de Matheron, on a assimilé la forme du ciment chloriteux à un ensemble de grains sphériques ; le choix d'un modèle plus subtil n'aurait sans doute pas numériquement changé grand'chose à la détermination de la surface minimale de la lame mince.

3. EFFETS DE PÉPITE DE LA TAILLE DU SUPPORT

Les effets de pépite dus à des transitions de type T_B , de l'ordre de grandeur de la taille du support, se manifestent dans les problèmes d'estimation de ces transitions, mais surtout dans ceux relatifs aux transitions du type T_C , ou T_B apparaît comme une variabilité parasite à contourner au mieux.

Par définition même du support, on ne peut plus adopter le raisonnement simplificateur qui a permis de déterminer très rapidement des formules comme (VI, 7) donnant la variance de l'échantillon macroscopique. Ici, le champ d'intégration est, dans certaines directions au moins, de l'ordre de la portée, et l'on doit recourir aux formules assez complexes de montées. L'une des conséquences de cet état de choses est que le volume du support, ou sa surface, ne pourront plus caractériser l'échantillon, comme dans (VI, 7) et (VI, 10), mais que leurs formes interviendront au plus haut point pour définir les limites du champ d'intégration des algorithmes de montée.

Plutôt que d'établir ici un vaste formulaire correspondant à toutes formes possibles, ou probables, de support, nous resterons le développement qui suit aux types d'échantillonnages usuels en exploitation minière, qui représentent une gamme assez étendue de montées pratiquement réalisées. Après avoir contrôlé expérimentalement ces lois de montées sur un exemple particulier (paragraphe 3.1.) on établira les formules relatives aux supports usuels (paragraphe 3.2.).

3. 1. Etude expérimentale de la montée

Reprenons l'exemple présenté au chapitre III, à propos de l'échelle métrique d'un minerai de Tucquegnieux. La situation de l'exemple et la régionalisation des blocs de 100 cm^3 ont été décrites plus haut, voyons maintenant comment varie cette régionalisation en fonction du support des mesures.

Le plus petit volume définissable sur le plan minier, est ce qu'on a appelé au chapitre III le support minier ponctuel, correspondant à un bloc cubique, de quelques centimètres cubes, qu'on planterait soit entièrement dans les concrétions, soit entièrement à l'extérieur. Ce support étant petit par rapport à la taille des concrétions, on peut négliger les cas où il est implanté sur leurs frontières.

Sur le plan expérimental, la mesure des caractéristiques de la régionalisation vue à travers ce support est très simple. On procède en deux étapes, en planimétrant les concrétions calcaires considérées comme une fonction en tout ou rien, et en déterminant leur teneur moyenne, ainsi que celle du minerai interconcrétions.

Ici, il vient :

	Teneur en fer	Poids spécifique	Porosité	Proportion
Concrétions calcaires	$t_1 = 13,5 \%$	$\rho_1 = (0,346)^{-1}$	$\omega_1 = 0,11$	$p_1 = 0,21$
Minerai inter-concrétions	$t_2 = 44,5 \%$	$\rho_2 = (0,280)^{-1}$	$\omega_2 = 0,35$	$p_2 = 0,79$
Moyenne du parement	$t_o = 35,5 \%$	$\rho_o = (0,299)^{-1}$	$\omega_o = 0,25$	$p_3 = 1$

La teneur en fer a pour expression

$$(VI,32) \quad t_o = p_1 \left[\frac{1 - \omega_1}{1 - \omega_o} t_1 \frac{\rho_1}{\rho_o} \right] + p_2 \left[\frac{1 - \omega_2}{1 - \omega_o} t_2 \frac{\rho_2}{\rho_o} \right]$$

et le palier C de la fonction intrinsèque des teneurs en fer (VI, 19) ; (VI, 23) ; (VI, 25) :

$$(VI,33) \quad C = p_1 p_2 \left[\frac{1 - \omega_1}{1 - \omega_o} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_o} t_1 - \frac{(1 - \omega_2)}{(1 - \omega_o)} \frac{\rho_2}{\rho_o} t_2 \right]^2$$

On a d'ailleurs vu (J. SERRA Bul. Tech. 1966) que le produit $(1 - \omega) \rho$ était pratiquement constant, et par conséquent que (VI, 32) et

(VI,33) se simplifiaient en :

$$(VI,34) \quad t = p_1 t_1 + p_2 t_2$$

$$(VI,35) \quad C = p_1 p_2 (t_1 - t_2)^2$$

Néanmoins, disposant de toutes les données expérimentales, nous ferons ici le calcul précis. (VI, 32) permet de vérifier si les chiffres mesurés sont cohérents entre eux : effectivement, on retrouve bien la valeur de t_0 à partir des éléments du tableau des données. Quant au palier C, il a pour valeur numérique :

$$C = 128 \text{ points}^2$$

Le second support est défini par les blocs de 100 cm^3 , ou tronçons de cinq centimètres pris dans des carottages horizontaux.

Le troisième support est constitué de ces carottes horizontales elles-mêmes, longues de 5 tronçons mis bout à bout.

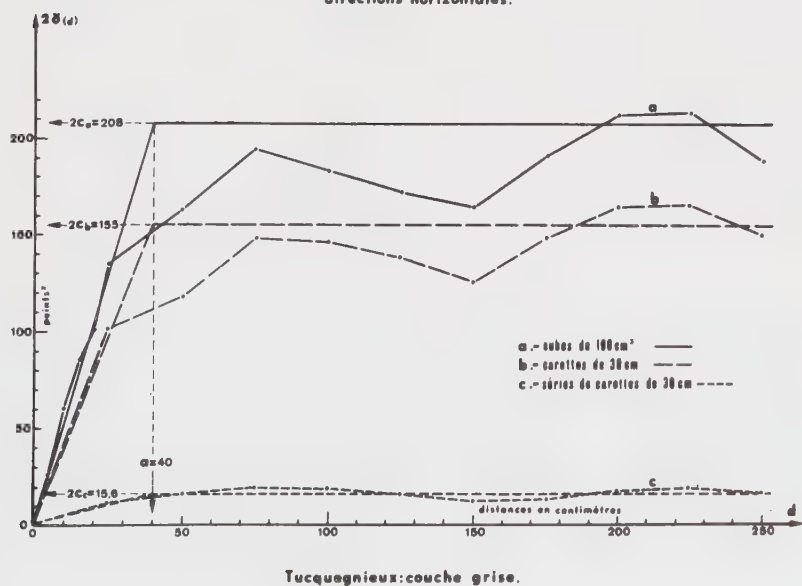
Le quatrième support, discontinu, est formé par l'ensemble de 7 carottes horizontales de 25 cm chacune, disposées à l'aplomb les unes des autres dans un même plan vertical (distance entre axes = 42 cm).

On a reporté sur la figure VI - 3 le variogramme horizontal correspondant aux trois supports carottés. On voit que les variogrammes d'une même direction sont pratiquement affines les uns par rapport aux autres.

On se contentera donc de porter son attention sur les variances expérimentales (ou paliers C) des courbes obtenus , et de confronter ces valeurs aux modèles théoriques.

Variogrammes des teneurs en fer;
directions horizontales.

Figure II-3



Les variances sont consignées dans le tableau VI -36.

Variances expérimentales du minerai de Tucquegnieux en fonction du support		
	Variance du fer ² en pts	Nombre de mesures
Support minier ponctuel	140	500 sections
Blocs élémentaires	104	1 320
Carottes reconstituées (25 centimètres)	77,5	207
Plans verticaux de 7 carottes	7,8	35

Effectuons les calculs de montées à partir des abaques IV-9 et IV-10 du schéma de Matheron. Si l'on assimile les variogrammes de la figure VI, 3 à un modèle de ce genre, les portées sont respectivement de 11,5 cm et 60 cm dans les directions verticale et horizontale. Il faut donc entrer dans les abaques en rapportant toutes les cotes verticales au dénominateur 11,5 et les distances horizontales à 60 cm, ces distances étant prises elles aussi en centimètres.

Blocs élémentaires

Ce sont des cylindres d'axe horizontal de 6 cm de diamètre et de 4 cm de longueur. Ils sont sensiblement équivalents aux parallélépipèdes obtenus en remplaçant la basse du cylindre par un carré de même surface, soit de 5,3 cm de côté.

La première montée, qui permet de passer du variogramme ponctuel à celui des blocs élémentaires multiplie la variance C par le facteur

$1 - F(h, \ell_1, \ell_2)$ où

$$h = \frac{5,3}{11,5} \quad \ell_1 = \frac{5,3}{60} \quad \ell_2 = \frac{4}{60}$$

On l'obtient par la lecture des abaques (IV-9) et (IV-10) du schéma de Matheron, et l'on s'aperçoit que les termes ℓ_1 et ℓ_2 sont négligeables.

$$F(h, \ell_1, \ell_2) \sim F(h) = 0,243$$

d'où la variance C_1 des blocs

$$C_1 = C \left[1 - F(h) \right] = 128 (1 - 0,243) = 98,5 \text{ points}^2$$

la valeur expérimentale correspondante est de 104 points^2 .

La seconde montée a pour paramètres :

$$h = \frac{5,3}{11,5} \quad \ell_1 = \frac{5,3}{60} \quad \ell_2 = \frac{30}{60}$$

ℓ_2 n'est plus négligeable et l'on trouve

$$C_2 = C \left[1 - F(h, \ell_2) \right] = 128 \cdot (1 - 0,362) = 81,4 \text{ points}^2$$

la valeur expérimentale est de 77,5 points².

La troisième montée (séries de 7 carottes horizontales) fait intervenir la variance d'extension des carottes horizontales, qu'on supposera être des lignes de longueur $\ell_2 = \frac{30}{60}$ dans des rectangles de longueur ℓ_2 , h, ou $h = \frac{42,5 \text{ cm}}{11,5 \text{ cm}} = 3,8$. Le fait de réduire les carottes à des droites nous oblige à prendre comme nouvelle variance ponctuelle non plus C, mais C_1 , il vient alors d'après l'abaque de variance d'extension $\sigma_{E_4}^2$ d'un segment dans un rectangle :

$$\sigma_{E_4}^2 = C_1 \cdot 0,577 = 0,56$$

Soit pour l'ensemble du plan vertical (cf. Chapitre IX - Composition des variances d'extension, 3ème partie)

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{7} \cdot \sigma_{E_4}^2 = 8,1 \text{ points}^2$$

la valeur expérimentale est de 7,8 points².

On peut considérer le schéma de Matheron comme satisfaisant.

3.2. Formules des montées usuelles

La discussion expérimentale précédente pose le problème de l'anisotropie zonale. L'on doit, pour établir correctement les formules de montées, tenir compte des deux types de transition pure rencontrés, soit dans la direction horizontale (celui de la figure 4. A) et dans la direction verticale (celui de la figure 4. B).

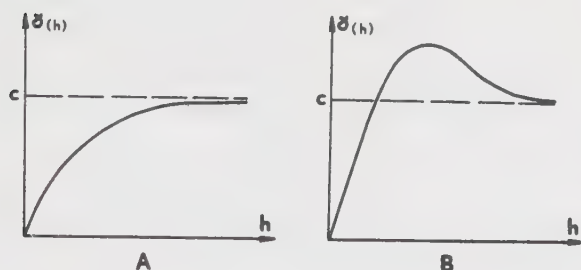


Figure VI-4
Les deux types de
fonctions intrinsèques de la
transition pure.

Mais on verra aussi qu'un sondage peut être considéré comme linéaire, car le diamètre de sa section est de l'ordre du dixième de la portée de la régionalisation métrique, donc parfaitement négligeable.

Aussi, en pratique, plutôt que de rajouter une composante zonale de migration à un schéma de Matheron, composante qui se prêterait mal à des expressions littérales (cf. J. SERRA SED. 1967). On utilisera dans la mesure du possible, le schéma de Matheron linéaire (figure 5. B) intermédiaire entre les deux cas de transition pure.

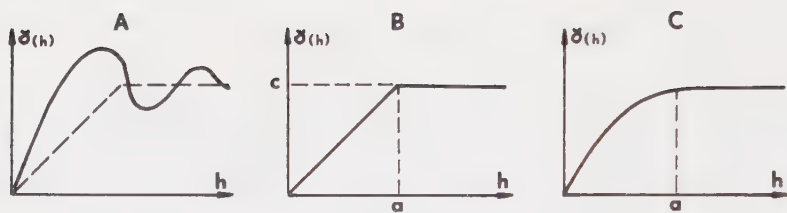


Figure VI-5

Ce schéma linéaire n'est mathématiquement cohérent qu'à une dimension, c'est-à-dire dans le cas des sondages verticaux, ou des séries verticales de prises discontinues. On l'étendra, en commettant une légère entorse à la logique, numériquement sans gravité, aux sondages obliques. Par contre, pour les prises bi ou tridimensionnelles (surface photographiée ou prélevée, volée de tir), où la dimension horizontale intervient avec au moins autant d'importance que la verticale, on adoptera le schéma de Matheron à trois dimensions, ou sphérique.

Dans ces conditions, les calculs de montée, que nous ne reproduisons pas en détail (pour avoir les formules de montée en schéma de Matheron linéaire, il suffit de prendre le 1er terme en r dans le schéma sphérique ; toutes les fonctions F , H et X calculées formellement au chapitre IV séparent les 2 termes dans cette intention). Les variances de montée pour une prise continue sont toutes du type $1 - F$, à une, deux ou trois dimensions on passe ensuite à des groupes de n prises, dans les conditions explicitées ci-après, en divisant par n les résultats relatifs à une prise unique.

Variance géostatistique des saignées et des trous de mines

Notations :

- h est la puissance de la couche
- φ est l'angle de la prise de mine avec la verticale. Pour une saignée, $\varphi = 0$, pour les trous de mine courants $\varphi = 45^\circ$
- La section droite de la prise est assimilée à un carré de côté b .
- La portée du variogramme horizontal est a_M
- La portée du variogramme vertical est a_m
- Le palier commun des deux variogrammes est C .

Les résultats sont établis pour une prise continue, mais restent valables pour une prise en trois ou quatre segments, verticaux ou obliques, pourvu que, évidemment, ils traversent au total toute la couche et ne se chevauchent pas.

La variance géostatistique d'échantillonnage s'écrit :

$$\sigma_S^2 = \frac{C}{h} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a_m^2} + \frac{t^2}{a_M^2}}} \left[1 + \left(\frac{1}{3} \log \frac{b}{a_M} - 0,44 \right) \frac{b^2}{a_M^2} \right]$$

L'influence de la section de la prise b n'apparaît que dans le crochet.

Or pour $b = 0$, section de taille nulle, le crochet vaut 1, et pour $b = 10$ et $a_n = 20$ cm, ce qui donne une section de 100 cm^2 , le crochet vaut encore 0,95; or 100 cm^2 correspondent à une prise nettement plus large que la

normale. D'où le résultat pratique : le gabarit d'une prise de mine n'a aucune importance pour la précision géostatistique de la mesure. Cela se comprend très bien. Tant que la taille des prises reste étroite vis à vis des concrétions, si on fait une prise deux fois plus large qu'une autre, la moitié gauche et la moitié droite de la prise traverseront pratiquement les mêmes concrétions, donc indiqueront les mêmes teneurs, et n'auront pas amorti cette hétérogénéité. Pour l'amortir vraiment, il faut prendre une zone plus vaste que les concrétions, soit à l'aide de plusieurs saignées, soit par un prélèvement continu (photographies, machines à échantillonner par disques), soit faire des séries de prélèvements ponctuels à maille régulière (compteurs à fluorescence X). A chacune de ces méthodes correspond une variance géostatistique d'échantillonnage, que nous allons calculer. Mais revenons d'abord sur σ_s^2 , variance d'une prise unique, qui peut s'exprimer de façon plus simple.

Le facteur entre crochets peut être négligé, de plus φ prend surtout deux valeurs usuelles, zéro pour les saignées et $\frac{\gamma}{4}$ pour les trous de mines. Enfin l'expression de C à l'aide de la formule (VI, 35) est plus parlante. σ_s^2 s'écrit donc :

Variances géostatistiques d'échantillonnages linéaires

$$(VI, 39) \quad \text{Saignées } \sigma_s^2 = p_1 \cdot p_2 \cdot (t_1 - t_2)^2 \cdot \frac{a_m}{h}$$

VI, 40) Trous de mine
$$\sigma_s^2 = \frac{p_1 p_2 (t_1 - t_2)^2}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_m^2} + \frac{1}{a_M^2}}}$$

p_1 et p_2 sont les proportions respectives des concrétions et du minerai interconcrétions, de sorte que p_1 et $p_2 = 1$. Quant à t_1 et t_2 , ce sont les teneurs de ces deux éléments.

Avec les valeurs numériques de l'exemple de Tucquegnieux, on trouve, pour la puissance de 3,20 m, la variance :

$$\sigma_s^2 = 3,00 \text{ pts}^2$$

Si l'on s'en tient à la fourchette traditionnelle de $\pm 2\sigma_s$, il vient donc $\pm 3,5$ points.

A l'opposé, Moutiers (couche rouge), où les paramètres a_m et h sont les mêmes, donne une variance σ_s^2 plus petite, car le palier C a diminué de plus de moitié et il vient :

$$\sigma_s^2 = 1,4 \text{ point}^2$$

De toutes façons, il apparaît là des variances extrêmement élevées et on doit s'attendre à trouver pour les minerais entrecroisés de puissance moyenne (3 mètres), à des variances qui dépassent 2 points, c'est-à-dire à des fourchettes de ± 3 points.

Variance géostatistique d'un groupe de saignées

Pour réduire la variance unitaire d'une verticale on peut effectuer plusieurs saignées. Si elles sont suffisamment espacées, on les considérera comme indépendantes. Plus précisément, on dira que cette indépendance est atteinte lorsque la distance entre deux prélèvements est égale ou supérieure à l'abscisse correspondant à 95 % de la croissance du variogramme. Dans ces conditions, la variance du groupe de n saignées est la variance unitaire divisée par n .

Par exemple, à Tucquegnieux, on trouve, pour la puissance de 3,2 mètres et un groupe de 3 saignées distantes d'un mètre cinquante la variance de :

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{3} \sigma_s^2 = 1 \text{ point}^2$$

Variance géostatistique d'une prise en forme de surface continue

Cette variance correspond au cas des photographies, ou d'un échantillonnage lamellaire à l'aide d'une scie. Reprenons les mêmes notations que précédemment, en ajoutant la longueur l de parement photographiée. La variance d'une surface a pour expression :

$$(VI, 41) \quad \sigma_p^2 = C \cdot \frac{a_m}{h} \cdot \frac{a_M}{l} \left[\frac{\tilde{\eta}}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{a_M}{l} + \frac{a_m}{h} \right) \right]$$

(l et h sont respectivement plus grands que a_M et a_m). Pour une photo dépassant 5 mètres, avec les portées usuelles, comme celles de nos exemples (VI, 41) s'écrit plus simplement :

Variance géostatistique d'échantillonnage selon une surface

$$\sigma_p^2 = C \cdot \frac{a_m}{h} \cdot \frac{a_M}{l} = p_1 p_2 (t_1 - t_2)^2 \frac{a_m}{h} \cdot \frac{a_M}{l}$$

Cette variance est nettement plus petite que celle d'un prélèvement linéaire. Dans le cas de Tucquegnieux on trouve pour $L = 6$ m

$$\sigma_p^2 = 0,06 \cdot \sigma_s^2$$

Variance géostatistique de prises complètement discontinues

Une prise complètement discontinue est par exemple la reconnaissance d'une photographie de parement à l'aide de pointés suivant une grille, par opposition à la planimétrie qui est continue. Mais le support n'est pas nécessairement ponctuel. Les méthodes de contact par fluorescence X ou encore les carottages de petits sondages à maille régulière du type de ceux de Tucquegnieux, sont des mesures complètement discontinues, c'est-à-dire à base d'une grille, mais non ponctuelles.

L'étude géostatistique des procédés de ce type se ramène à celle des séries de saignées.

Ici encore, il faut donc séparer les verticales de prélèvements par des intervalles correspondant à 95 pour cent au moins de la croissance du variogramme. Dans ces conditions la variance d'une grille de n colonnes est le $n^{\text{ième}}$ de la variance d'une colonne. Le calcul de la variance d'une

colonne est un problème un peu plus délicat. L'effet de trou entraîne une pseudo-périodicité verticale, de par l'alternance mi-aléatoire, mi-périodique, des concrétions. De plus, les formules établies se prêtent mal à des expressions simples des variances. On contournera ces deux difficultés simultanément en imposant à la maille d'échantillonnage, dans la direction de l'effet de trou, d'être inférieure ou égale à l'abscisse du maximum du $\gamma(h)$.

Cette règle supprime les risques d'entrer en résonance avec la pseudo période. D'autre part, elle permet de remplacer le schéma de migration par un schéma linéaire, à partir duquel ont été calculées les formules qui suivent.

Soit h la puissance de la couche analysée

d la distance entre deux prélèvements élémentaires voisins,

la portée a_m est encore définie comme l'abscisse de l'intersection entre le palier $2C$ (double de la variance expérimentale) et la pente à l'origine du variogramme.

Une verticale de prélèvements se comporte exactement comme une saignée, mais à laquelle on adjoint une variance supplémentaire, dite variance d'extension des prélèvements à la saignée. La somme des deux variances, σ_c^2 , est la variance de la colonne et a pour expression :

$$(VI, 43) \quad \sigma_c^2 = \frac{C}{a_m} \cdot \frac{1}{h} \left[a_m^2 + \frac{d^2}{6} \right] = \frac{P_1 P_2 (t_2 - t_1)^2}{a_m \cdot h} \left[a_m^2 + \frac{d^2}{6} \right]$$

La variance des n colonnes de la grille (suffisamment espacées)
est $\frac{1}{n} \cdot \sigma_c^2$, soit :

Variance géostatistique d'échantillonnage selon une grille

$$(VI, 44) \quad \sigma_G^2 = \frac{p_1 p_2 (t_2 - t_1)^2}{n \cdot a_m \cdot h} \cdot \left[a_m^2 + \frac{d^2}{6} \right]$$

Si les prélèvements ne sont pas ponctuels, les formules précédentes restent vraies, mais le variogramme où l'on détermine C et a, doit être construit à partir des valeurs expérimentales fournies par les prélèvements réalisés. On trouvera alors des valeurs de C légèrement inférieures à $p_1 p_2 (t_2 - t_1)^2$.

4. ECHANTILLONNAGE DES MINERAIS LORRAINS EN PLACE

4.1. Erreurs de mesures

Il convient de dire un mot des erreurs d'analyses et de mesures diverses. C'est là un problème qui a été souvent et remarquablement bien étudié. Mais actuellement les techniques de quartage des poudres et les analyses de fer des laboratoires courants introduisent pour leur compte une variance totale de l'ordre de 0,05 point² au pire. L'hétérogénéité du minerai en amène d'autres vingt à cinquante fois plus importantes. On peut en première approximation négliger ces erreurs (il n'en serait plus de même pour le quartage des gros blocs dans l'échantillonnage des rames ou des stocks).

D'autres types d'erreurs, bien plus pernicioeux, interviennent dans la prise elle-même. Ils sont dûs à la définition de la couche et à la validité de la technique expérimentale utilisée.

L'erreur de définition de couche se traduit par une modification de l'effet de pépite non prévisible, mais faible, et le plus souvent agissant dans le sens d'une détérioration de cet effet, ce qui est excellent. En effet, dans les minerais entrecroisés, cette erreur fait rajouter une tranche argileuse, prise au toit ou au mur, qui elle ne comprend pas de régionalisation métrique notable. La répercussion de cette prise sur la couche est analogue à celle de passées argileuses au milieu du faciès entrecroisé lui-même, dont nous allons parler dans un instant. Enfin, notons à ce sujet qu'on ne peut pas à vrai dire parler d' "erreur" de prise de marne en pied de couche, quand l'exploitation reprend pour son compte cette même erreur en englobant dans le volume extrait l'argile en gestion. Au contraire, il vaut mieux conserver au variogramme son caractère pragmatique et adopter pour puissance des saignées à celle du traçage ou du dépilage vrai.

Certaines techniques de prises s'accompagnent d'erreur d'un autre type, plus dangereux, car il est systématique. Les trous de foration dévient et mordent préférentiellement dans les parties tendres, donc riches, de la roche. Les retombées de poudres sont sélectives et demandent à être contrôlées avec le plus grand soin. Les saignées mal faites ondulent et serpentent le long du parement au lieu de le traverser de façon bien rectiligne, etc...

Toutes ces causes d'erreurs sont d'autant plus dangereuses que la multiplicité des prises ne les amortit pas, au contraire des erreurs géostatistiques, ou aléatoires. Elles sont même difficilement mesurables. Il faut simplement chercher à les combattre en respectant la géométrie du support qu'on a choisi, et en récupérant la totalité de l'échantillon. La meilleure technique pour arriver à ces fins est à coup sûr le carottage.

4.2. Echantillonnage et paragénèses

D'une façon apparemment arbitraire, nous avons concentré toute notre attention sur les couches entrecroisées, et négligé les marnes de pieds de couche, ou les minerais plus ou moins argileux.

En fait, le problème de l'échantillonnage disparaît avec les minerais argileux, on peut même dire, disparaît proportionnellement à la présence d'argile, comme on va le voir dans un instant.

La mine d'Hayange, depuis des années, effectue ses prises de mines par groupe de trois ; il y a donc moyen, en étudiant le début des variogrammes dans chaque couche reconnue, de déterminer à travers toute une concession, et pour des types de minerais bien différents, les caractéristiques de ce début de variogramme. On les a reportées au chapitre III en les transformant par affinité pour les ramener à une puissance commune (toutes les variances géostatistiques d'échantillonnage sont inversement proportionnelles à la puissance). Le nombre de prises qui a permis de tracer ces courbes est de 2000, réparties sur des kilomètres carrés ; elles sont toutes récentes (postérieures à 1945) et la variance des erreurs de mesures, qui apparaîtra comme décrochement à l'origine des variogrammes n'est relativement pas importante.

Le groupe des quatre variogrammes les plus hauts (couches rouge et grise de l'exploitation nord et du bois d'Avril) est constitué de 4 couches entrecroisées oxydées et chloriteuses, et l'ordre de grandeur du palier (13 points²) est double de la variance des prises d'un mètre ; si on le compare aux variances des saignées de St Pierremont ou Tucquegnieux, définies pour des minerais de même type sur des puissances de 2,5 m, on trouve :

$$\sigma^2 = \frac{13}{2 \cdot 2,5} = 2,6$$

ce qui est tout à fait l'ordre de grandeur des précédentes (2,7 et 2,8 pts²). La couche grise de l'exploitation nord qui, des quatre couches, est la moins riche en teneur, et qui possède la proportion de boules calcaires la plus élevée, a comme il se doit le palier le plus fort. C'est exactement ce qu'on avait vu pour Saint Pierremont.

Le variogramme de la couche jaune principale du bois d'Avril est très intéressant car, un passage latéral en dents de scie, depuis le faciès entrecroisé jusqu'au faciès argileux truité, se déroule dans cette région.

Nous ne connaissons pas la teneur moyenne en argile, mais la teneur en silice y est de 13,4 % (pieds de couche exclus). Or le palier du variogramme est deux fois et demie plus petit que précédemment, et la variance d'une saignée de 2,50 mètres n'est plus maintenant que de 1,2 point².

Enfin, la couche brune de l'exploitation nord, parfaitement argileuse a une variance encore deux fois plus petite, de 0,6 pts² pour une prise de 2,50 mètres, ce qui correspond à la même précision que 5 saignées dans le cas des minerais entrecroisés.

Le problème de l'échantillonnage disparaît donc progressivement avec l'apparition d'argile. Pour la couche brune du bassin, il ne se pose plus. Cette remarque permet de répondre au problème des pieds de couches, et des chargements latéraux de faciès. Il suffit de relever, sur toute la puissance exploitée h , la proportion h_1 / h de puissance entrecroisée. Si cette proportion excède 90 %, on considérera que, du point de vue des lois d'échantillonnage, le minerai équivaut à un minerai entrecroisé, et on appliquera les règles précédentes (ce que faisant on ne pourra pécher que par excès de sévérité). Sinon, on appliquera les règles d'échantillonnage à la partie entrecroisée de la couche, de puissance h_1 et on pondérera la variance trouvée par $(\frac{h_1}{h})^2$. Enfin si le minerai est entièrement argileux, on se contentera d'une seule prise, quelle que soit la puissance de la couche.

4.3. Règles d'échantillonnage des minerais lorrains en place

On peut résumer les résultats précédents en l'ensemble des règles suivantes :

Règle 1 : Respecter scrupuleusement la géométrie du support qu'on s'est fixée à l'avance (qu'il s'agisse d'une seule saignée, ou de tout un groupe implanté suivant une maille).

Règle 2 : Récupérer en totalité la quantité de matière du prélèvement.

Règle 3 : La section optimale d'une prise est la plus petite dont on puisse réaliser rigoureusement la géométrie.

Règle 4 : La distance minimale entre deux prises voisines (direction horizontale) est l'abscisse correspondant à 95 pour cent de la croissance du variogramme. S'il est technologiquement facile d'adopter une distance encore plus grande, c'est d'autant meilleur (ceci est vrai pour les groupes de saignées, comme dans les échantillonnages par grille entre séries de prises disposées suivant une même verticale).

Règle 5 : En présence d'un variogramme accusant un maximum prononcé (variogramme à effet de trou dans une direction donnée) la maille d'échantillonnage dans cette direction doit impérativement être inférieure ou égale à l'abscisse du maximum.

Les formules et les quelques règles qui ont été énoncées, suffisent à un exploitant, quelle que soient les caractéristiques géologiques et minières de son minerai, pour l'échantillonner avec une précision fixée à l'avance.

Quelle précision choisir ? Si l'on se contente de connaître la teneur moyenne de toute une concession, la qualité de chaque échantillon est moins importante que leur nombre total, et la régularité de leur répartition. Par contre si l'on désire, à l'aide de l'échantillonnage, prévoir les caractéristiques locales de la minéralisation (teneur d'un panneau de 100 x 100 m : teneur de la production d'un quartier ...), l'étude du krigeage montre alors

que la limite de 1 point² est le grand maximum de variance qu'on puisse tolérer d'un échantillonnage de minerai en place, et on doit plutôt chercher à atteindre une variance de 0,5 point². Au delà d'un point² les calculs d'estimation de quartiers et de panneaux deviennent pratiquement illusoires. On se fixera la norme suivante :

Norme d'échantillonnage : la variance maximale d'échantillonnage d'un minerai en place doit être de 1 point², on cherchera en pratique à atteindre la variance de 0,5 point².

Pour les différents minerais et les différents types d'échantillonnages, il suffit donc de calculer, à partir des formules correspondantes du texte, la variance d'une prise verticale, et de diviser par le nombre de prélèvements qu'il faut, pour se ramener à une variance inférieure à 1 ; ce qui risquera de demander deux, trois ou quatre prises suivant les cas.

Le résultat obtenu indiquera la teneur du minerai en place. Pour les traçages, c'est aussi la teneur exploitée, pour les dépilages les risques de chargement de l'éboulement pourront abaisser systématiquement la teneur d'1 point environ (et augmenter la teneur en silice). Il appartient à chaque exploitant de mesurer pour son propre compte ce décalage qui, répétons-le, restera stable à travers une exploitation.

Quant à la raison d'être de la norme d'échantillonnage, nous l'analyserons au prochain chapitre à travers l'étude du krigeage.

CHAPITRE VII

LE KRIGEAGE

SOMMAIRE

Le problème du krigeage est la recherche du meilleur estimateur d'un panneau minier à partir des travaux de reconnaissances. Après avoir posé le principe de la méthode, qui consiste à minimiser la variance d'extension correspondante, on particularise au paragraphe 1 le krigeage au cas où les travaux de reconnaissances sont discontinus (sondages), restriction qui sera maintenue dans tout le chapitre. Le calcul aboutit alors à la résolution d'un système linéaire fondamental, le système de Matheron. On vérifie ensuite que les figures de krigeage sont superposables (estimations de plusieurs panneaux à partir du même réseau de reconnaissances) et l'on passe en revue les divers types de configurations possibles rencontrés en pratique (mailles régulières, mailles aléatoires stratifiées, mailles purement aléatoires).

Le paragraphe 2 étudie plus spécialement l'influence des quatre paramètres caractérisant les schémas de transition sur le krigeage. L'effet de pépite $= \frac{C_0}{C}$, prépondérant, lève les écrans et déstructure le krigeage. La $\frac{C_0}{C}$ portée a suggère de sérier les problèmes selon la taille des mailles ; l'anisotropie $\frac{a_m}{a_M}$ intervient comme un léger correctif, parfois négligeable et permet de trouver des classes de figures équivalentes (rectangles, losanges), enfin l'amplitude $C + C_0$, indépendante des coefficients de krigeage, intervient comme facteur de proportionnalité dans sa variance.

Le paragraphe 3 applique le système de Matheron aux mailles régulières à implantation préférentielle, en distinguant la taille de ces mailles vis à vis de la portée.

Le paragraphe 4 reprend en le détaillant une série de cas particuliers du paragraphe précédent, en vue des applications aux travaux miniers très discontinus.

Le dernier paragraphe, n° 5, traite le problème des mailles aléatoires stratifiées, ou des effets de pépite accusés. Selon la taille du panneau vis à vis de la maille de reconnaissance, deux types d'approche sont analysés, le premier retrouvant la formule originelle de D.G. Krige (grands panneaux), le second débouchant à son tour sur un troisième atlas d'abaques (abaques de krigeage aléatoire).

1. DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES

1.1. Le système de MATHERON

En géostatistique, la notion de variance d'extension permet de poser et de résoudre dans la mesure du possible deux problèmes essentiels, l'un de nature économique, qu'on abordera au chapitre X^{*}, et l'autre, principalement technique, celui du krigeage.

Etant donné un champ V et une fonction de pondération $p(x)$ nulle en dehors de V , et de somme unité, on se propose d'estimer l'intégrale

$$Z = \int_V p(x) f(x) dx$$

à partir des valeurs numériques, supposées connues, prises par la variable régionalisée sur un ensemble de points V' . Quelle importance, quel poids doit-on attribuer à chacun des points de V' pour réaliser au mieux cette estimation ?

Défini en ces termes, le krigeage apparaît comme le coeur du problème de l'estimation minière, et il est abordé d'une manière extrêmement générale. Ici, nous émettrons, pour tout le chapitre, deux hypothèses restrictives qui en pratique sont constamment vérifiées en Lorraine. La fonction $p(x)$, en premier lieu, sera prise égale à $\frac{k(x)}{V}$, on s'intéressera à la teneur moyenne de V , et, de plus, l'ensemble V' des valeurs connues de la variable sera l'échantillonnage discontinu de n prélèvements ponctuels (sondages, saignées ...).

* Cf. Troisième partie

Plus exactement, nous formulerons le problème du krigeage de la manière suivante. Etant donné un gisement G doué de loi de dispersion intrinsèque, dans lequel on a prélevé n échantillons $S_1 \dots S_n$, dont les teneurs connues sont $x_1 \dots x_n$, on cherche à former le meilleur estimateur Z^* , soit :

$$(VII, 1) \quad Z^* = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

de la teneur réelle inconnue Z d'un panneau P , connaissant la forme, les dimensions et l'implantation relative de $P, S_1, S_2 \dots S_n$.

Trouver le meilleur estimateur, cela veut dire qu'on associera une variance à l'estimation qu'on calculera, mais cela veut surtout dire qu'on évitera toute erreur systématique. D.G. Krige a montré que si la sélection d'un panneau minier était faite au seul vu de son échantillonnage intérieur, il en résulterait nécessairement, en moyenne, une surestimation de la teneur des panneaux sélectionnés. Prenons un exemple. Considérons une concession où les minerais de teneurs inférieures à 30 % seront jugés inexploitable, et faisons l'hypothèse que la géologie de la minéralisation reste homogène, il n'y a pas de faille majeure, ni de disparition du faciès par épuisement de la puissance (régionalisation intrinsèque). Les prélèvements effectués dans les galeries A et B indiquent les teneurs reproduites sur la figure VII-1.

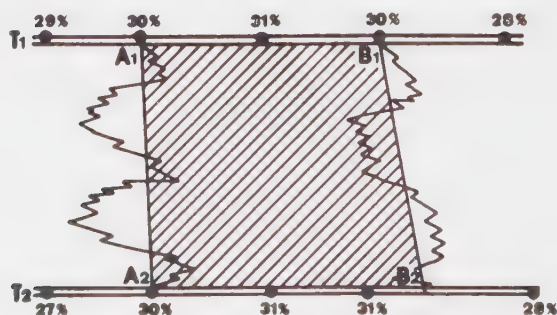


Figure VII-1

Le problème consiste à sélectionner au vu de cet échantillonnage le panneau interne aux traçages T_1 et T_2 , dont la teneur soit supérieure à 30 %. Si l'on se contente de joindre les points de teneur 30 % de T_1 à leurs homologues de T_2 , traçant les lignes $A_1 A_2$ et $B_1 B_2$, on commet nécessairement une erreur, dans le sens de la surestimation. En effet, la frontière vraie qui part de B_1 pour B_2 est incomparablement plus chaotique que le tracé rectiligne qui la remplace. En exploitant $A_1 A_2 B_1 B_2$, on laissera donc à l'extérieur un minerai riche, et inversement on prendra un minerai de teneur inférieure à 30 %. Comme il n'est pas possible de suivre effectivement la frontière chaotique, le but du krigeage doit conduire ici à déplacer le tracé rectiligne vers la zone riche pour atteindre la teneur moyenne voulue dans le panneau. Ce déplacement se déterminera à l'aide de tous les échantillons internes comme externes au panneau.

Il est toujours possible (variables régionalisées, chapitre XII) de résoudre ce problème. On cherche à déterminer les coefficients en vérifiant la condition que la vraie valeur inconnue z et l'estimateur z^* aient la même moyenne dans tout le champ G , c'est-à-dire :

$$(VII, 2) \quad \sum_i a_i = 1$$

On traduit le fait que l'estimation est la meilleure possible en calculant les a_i : de sorte que l'estimateur (VII, 1) ait la variance d'extension la plus petite possible. On exprimera que cette variance fournie par la formule générale :

$$(VI, 3) \quad D^2(z - z^*) = \sigma_z^2 - 2 \sum_i a_i \cdot \sigma_{zxi} + \sum_i \sum_j a_i a_j \sigma_{ij}$$

est minimale, compte tenu de la relation (VII, 2) en écrivant

$$(VII, 4) \quad \begin{aligned} \sum_j a_j \cdot \sigma_{ij} &= \sigma_{zx_i} + \lambda \\ \sum_j a_j &= 1 \end{aligned}$$

Comme le paramètre de Lagrange, λ ne présente pas d'intérêt par lui-même, on cherchera à l'éliminer en faisant jouer un rôle particulier à l'un des échantillons (en pratique, soit celui qui occupe une position centrale vis à vis des autres, soit au contraire la moyenne des échantillons les plus lointains). Dans ces conditions, le système (VII, 4) se réduit à :

$$(VII, 5) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_j R_{ij} = N_i \\ R_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{nj} - \sigma_{ni} + \sigma_{nn} \\ N_i = \sigma_{zx_i} - \sigma_{zx_n} - \sigma_{in} + \sigma_{nn} \end{cases}$$

L'ensemble des équations (VII, 5), encore appelé système de Matheron, est fondamental. Il permet de passer des covariances calculables par la géostatistique, du panneau avec les différents échantillons, et des divers échantillons entre eux, aux coefficients de krigeage. Quant à la variance de krigeage correspondante, elle s'écrit alors sous la forme très simple suivante :

$$(VII, 6) \quad \sigma_K^2 = \sigma_z^2 - 2 \sigma_{zx_n} + \sigma_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i N_i$$

La première partie de cette expression représente la variance d'extension de l'échantillon S_n dans le panneau P. C'est la variance d'estimation qu'on obtiendrait si l'on ne disposait que de la teneur x_n du seul échantillon S_n . Chacun des autres échantillon $S_1 \dots S_{n-1}$ apporte une amélioration qui se traduit par la soustraction des termes $a_i N_i$, toujours positifs.

Le système de Matheron n'est lié qu'à l'existence d'une loi intrinsèque de la variable régionalisée, il est donc extrêmement général, et résoud formellement tous les problèmes que nous aurons à nous poser ici. Si au lieu d'un nombre discontinu d'échantillons, nous avons disposé de la connaissance de la variable en tous les points d'une courbe continue (ex : le long d'une galerie de traçage), le problème se formulait de façon équivalente à l'aide d'un système d'équations intégrales.

Pour autant qu'il soit général, le système de Matheron n'en demeure pas nécessairement simple. Si par exemple l'on désirait kriger un gisement reconnu par 100 sondages, en tenant compte de la répercussion de chacun d'eux sur toutes les zones du gisement, les 100 coefficients a_i seraient solutions d'un système à 100 équations linéaires, dont l'établissement nécessiterait le calcul préalable de 5000 covariances σ_{ij} et 100 covariances σ_{iz} . On fera donc le plus grand cas des approximations et des simplifications qui rendront effectif l'usage courant d'un tel procédé. De telles simplifications peuvent provenir soit de la géométrie des travaux miniers, soit du procédé de calcul de krigeage lui-même. Examinons ces deux voies d'accès au krigeage.

1.2. Krigeage complet et comptabilité minéral et métal

Outre son caractère linéaire, le système de Matheron présente une particularité remarquable : les coefficients de la matrice R_{ij} , c'est-à-dire des premiers membres des équations (VII, 5) ne dépendent que des positions respectives des reconnaissances entre elles, et sont indépendantes du panneau à estimer. Le panneau n'intervient que dans les deuxièmes membres N_i par l'intermédiaire des covariances σ_{zxi} de sa teneur avec celles des échantillons S_i . Il en résulte un théorème de superposition des figures de krigeage. Supposons en effet que l'on ait krigé à partir des mêmes échantillons $S_1 \dots S_n$ deux panneaux distincts, de taille P et P' , de teneur réelle z et z' , c'est-à-dire que l'on ait formé les estimateurs

$$z^* = \sum a_i x_i \qquad z'^* = \sum a'_i x_i$$

où les a_i et les a'_i sont les solutions du système de Matheron pour les valeurs des seconds membres N_i et N'_i correspondant aux panneaux P et P' . Si l'on désire kriger le panneau $P + P'$ constitué par la réunion de deux précédents (on suppose que P et P' n'ont pas de partie commune), dont la teneur réelle est :

$$Z = \frac{P}{P + P'} z + \frac{P'}{P + P'} z'$$

on obtient les seconds membres du système en pondérant les covariances par la taille des panneaux

$$\sigma_{x_i Z} = \frac{P}{P + P'} \cdot \sigma_{x_i z} + \frac{P'}{P + P'} \cdot \sigma_{x_i z'}$$

c'est-à-dire en effectuant la même pondération sur les seconds membres eux-mêmes. Il résulte alors du caractère linéaire du système que les coefficients A_i du krigeage de $P + P'$ sont :

$$A_i = \frac{P}{P + P'} a_i + \frac{P'}{P + P'} a'_i$$

et l'estimateur lui-même prend la forme

$$Z^* = \frac{P}{P + P'} z^* + \frac{P'}{P + P'} z^{* '}$$

Autrement dit, il y a superposition des figures de krigeage (avec pondération par les tonnages). Mais ce résultat suppose essentiellement que les deux panneaux P et P' soient krigés par les mêmes échantillons S_i .

En particulier, si l'on veut former le meilleur estimateur de la teneur globale d'un gisement entier, on a le droit de pondérer les estimateurs obtenus pour chacun des panneaux, sous réserve que ceux-ci aient été krigés complètement, c'est-à-dire par tous les sondages. L'estimation panneau par panneau est alors équivalente à l'estimation globale, et la comptabilité minéral et métal est alors équilibrée.

Ainsi, le théorème de superposition des krigeages complets assure le lien entre l'estimation locale et l'estimation globale d'un gisement. Si non seulement on désire connaître les réserves du gisement dans leur ensemble, mais qu'on cherche à les localiser, il faut donc en passer par un krigeage de toute la minéralisation. Nous verrons plus loin comment ce théorème est applicable au calcul des réserves du gisement de fer lorrain.

Auparavant, nous voudrions fournir, à titre d'illustration, un contre-exemple, assez parlant, de la nécessité pour tout calcul de réserves analytiques de tenir compte de cette comptabilité minéral métal.

Imaginons un mineur qui pour donner une dorure mathématique à son travail, adopte la pratique suivante : dans les problèmes d'estimations locales, il décide que la teneur de chaque panneau sera calculée par pondération des sondages les plus proches, le coefficient de pondération de chaque sondage étant proportionnel à l'inverse de la distance du sondage au centre de gravité du panneau (et rapporté évidemment à la somme des inverses pris en considération). Si r_i est la distance entre le sondage s_i et le centre de gravité de P ; a_i a pour valeur $\frac{1}{r_i} \cdot \frac{1}{\sum_i \frac{1}{r_i}}$.

Imaginons, dans ces conditions, un panneau carré de centre O , et dont les milieux des côtés sont M_1 M_2 M_3 M_4 . Au milieu des segments OM_1 , OM_2 , OM_3 et OM_4 sont implantés quatre sondages qui titrent respectivement 36 %, 30 %, 36 % et 30 % (figure VII - 2).

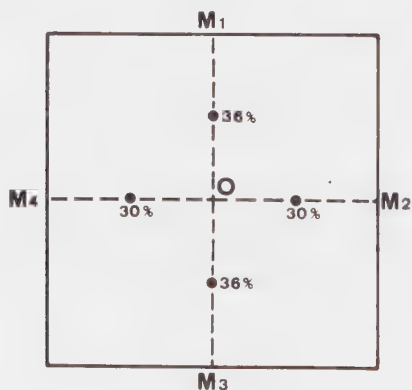


Figure VII-2

L'application de la règle de pondération indiquée à l'instant donne pour l'estimateur 33 %. Découpons maintenant le panneau P en deux morceaux, séparés par $M_1 M_3$. Au centre de chaque morceau se trouve un sondage de teneur 30 %, qui toujours d'après la règle précédente, prend dans son panneau respectif un poids égal à 1. Par reconstitution, la teneur de P est la moyenne des teneurs des deux panneaux, soit 30 %. Enfin, si nous découpons P en deux morceaux, séparés par $M_2 M_4$, nous obtiendrons par reconstitution une teneur de P égale, cette fois-ci à 36 %. D'ailleurs par continuité il suffit de déplacer les lignes $M_1 M_3$ et $M_2 M_4$ parallèlement à elles-mêmes, pour bâtir un découpage de P qui nous permette d'avoir la teneur qu'on voudra, pourvu qu'elle reste comprise entre 30 et 36 %. Ainsi, une mathématisation assez sommaire du réel risque de déboucher sur des résultats complètement dépourvus de sens.

Un autre intérêt du théorème de superposition tient de ce qu'à la limite on peut kriger point par point une minéralisation et reconstituer à partir des solutions ponctuelles l'estimateur d'un panneau de forme quelconque. Le calcul pour chaque point s'exprime formellement toujours de la même façon, et permet donc la résolution très commode de n'importe quel krigeage à l'aide d'un ordinateur, sans avoir à calculer au préalable autre chose que des covariances ponctuelles, c'est-à-dire des variogrammes. Somme toutes, pour une répartition donnée des sondages, le système de Matheron appliqué à un point mobile à travers tout le gisement définit une fonction de l'espace, celle de l'estimateur optimal du point, bien plus continu que la régionalisation elle-même, dont on prend ensuite la valeur moyenne dans n'importe quel panneau.

1.3. Krigeage et géométrie des travaux miniers

On peut classer les travaux miniers usuels suivant leur degré de régularité et suivant leurs échelles.

1.3.1. Mailles régulières

Les travaux appartiennent à leur tour à deux types selon qu'il s'agit de la reconnaissance, ou des panneaux à estimer. Fréquemment, le champ géométrique auquel on décide de s'intéresser est choisi au sein d'une régionalisation plus vaste, au vu des résultats des prélèvements eux-mêmes. Ou alors, ce qui pratiquement conduit au même résultat, l'implantation des panneaux et celle de l'échantillonnage sont commandées par une même opération technologique. Dans les exploitations en couche de Lorraine, le traçage des galeries délimite et les panneaux et simultanément les points de concours des galeries où l'usage veut qu'on dispose les prélèvements. Dans ce cas, les deux types de travaux miniers sont parfaitement réguliers, et synchronisés l'un avec l'autre, en terminologie géostatistique on parle de mailles régulières à implantation préférentielle.

Souvent aussi, le champ V est, bien qu'inconnu, imposé par la nature des choses. C'est en particulier le cas lorsqu'on s'intéresse à la totalité d'une régionalisation, et non plus à une portion sélectionnée à l'intérieur d'un champ plus vaste. Dans ces conditions, le champ V n'étant pas connu a priori, en général, le réseau des prélèvements n'aura que peu de chances d'occuper la même position préférentielle que ci-dessus. Parmi les échantillons périphériques, les uns tomberont trop près des frontières du champ, et les autres loin. Tout se passe comme si le réseau

régulier avait été, dans son ensemble, implanté de façon aléatoire. A une échelle plus petite que celle du gisement dans son ensemble, on retrouve la même disposition pour les stots de protection, les failles, ou certains travaux anciens, disposés n'importe comment vis à vis d'une maille régulière actuelle. La terminologie géostatistique correspondantes parle alors de mailles régulières à implantation flottante.

1.3.2. Mailles aléatoires et aléatoires stratifiées

Bien que ce ne soit pas, en général, une pratique très recommandable, il arrive parfois que les prélèvements soient implantés un peu n'importe où, et ne puissent pas se rattacher à un réseau régulier. Dans certains cas, tout se passe comme si chaque échantillon avait été implanté au hasard dans V, indépendamment des autres, et la maille est dite aléatoire pure. Plus souvent, sans s'astreindre à une maille régulière, on s'est efforcé cependant de maintenir dans V une "densité" de prélèvements à peu près constante. Dans ce cas, tout se passe à peu près comme si V avait été découpé en zones d'influence égales entre elles, et comme si un prélèvement avait été implanté au hasard dans chacune des zones d'influence indépendamment des autres. Dans ce cas, la maille est dite aléatoire stratifiée.

1.3.3. Echelles de production

La seconde classification des travaux miniers est celle des niveaux de production, tels qu'ils ont été décrits au chapitre V. La plus petite unité, correspondant à la production mensuelle, ou trimestrielle d'un quartier de mine, se présente comme une surface relativement petite,

et le plus souvent irrégulière dans sa forme et dans son implantation vis à vis de la maille. Ce ne serait pas le cas dans une exploitation sélective, comme une carrière, où chaque bloc serait pris ou laissé, selon les résultats de son krigeage ; mais dans une minéralisation du type du gisement lorrain, la méthode d'exploitation par chambres et piliers découpe en un mois une bande fort irrégulière de dépilages et de traçages dans le plan minier. Selon le type d'échantillonnage, on se trouve en présence d'une maille régulière à implantation flottante, ou d'une maille aléatoire stratifiée, de réseau indépendant du volume prélevé.

A une échelle de production supérieure, représentant quelques années, le krigeage se situe en Lorraine au niveau des quartiers eux-mêmes, et des panneaux souvent réguliers, et à implantation régulière, d'une centaine de mètres de côté. Par superposition, cette même échelle peut servir au krigeage de toute une mine, à ce moment là, différents types de mailles pourront coexister suivant les quartiers.

Enfin, au niveau du gisement entier et de la localisation assez précise de ces zones, plus ou moins riches, le problème du krigeage réapparaît à une autre échelle, à partir d'autres phénomènes de transition que ceux de l'échelle minière ; et presque toujours en termes de krigeage aléatoire .

Cette multiplicité des cas d'exploitation va nous servir de plan pour le chapitre. Après avoir étudié les propriétés plus particulières dues aux schémas de transition (par. 2) et avoir analysé l'influence des quatre paramètres du $\gamma(h)$ de transition sur le krigeage, on commencera au paragraphe 3 par le calcul des configurations régulières à implantations préférentielles (mailles petites, moyennes et grandes) pour passer ensuite (par. 4) au cas particulier important des panneaux très irréguliers, mais petits vis à vis de la portée, qui correspond à l'exploitation trimestrielle du quartier de mine lorrain ; le paragraphe 5 terminera le chapitre par l'étude du krigeage aléatoire.

2. KRIGEAGE DES PHENOMENES DE TRANSITION INTRINSEQUES

La connaissance d'un schéma de transition bidimensionnel dépend, à travers le choix du modèle adopté, de quatre paramètres majeurs, la portée a , les amplitudes C_0 et C de l'effet de pépite et de la transition proprement dite, et dans l'hypothèse simplificatrice où le schéma se déduit d'une structure isotrope par une affinité géométrique, le module $\frac{am}{aM}$ de cette transformation, mesuré par le rapport de la portée minimale sur la portée maximale.

Ces quatre paramètres interviennent fort différemment et demandent à être passés en revue l'un après l'autre, avant que l'on aborde la résolution proprement dite des configurations à kriger.

2.1. Influence de l'effet de pépite sur le krigeage

L'effet de pépite, on l'a vu, ne modifie pas les covariances, mais majore les variances d'une variance de pépite que l'on peut écrire simplement :

$$\sigma_p^2 = \frac{C_0}{v}$$

où C_0 est déterminée expérimentalement à partir d'un variogramme, ou calculée a priori et v le volume de l'échantillon.

Or, l'expérience et la théorie montrent qu'en absence d'effet de pépite, les problèmes du krigeage sont grandement simplifiés par

l'existence d'écrans des reconnaissances les unes par rapport aux autres. Dans un cas de figure comme celui de la figure (VII - 8) l'ensemble des sondages extérieurs aux 16 sondages qui entourent P apporte à l'estimation de ce panneau un complément d'information négligeable, à cause de la compacité de ce premier réseau. Nous aurons l'occasion de constater beaucoup d'exemples de cette propriété, qui simplifie dans une très large mesure le problème du krigeage complet. Mais, malheureusement, elle n'est vraie qu'en l'absence d'effet de pépité. En effet, dans ce dernier cas, la règle générale qui consiste à majorer chaque variance σ_y^2 par la quantité $\frac{C_o}{V_y}$, s'applique également au krigeage, mais conduit à des modifications importantes des formules habituelles, modifications qui vont toujours dans le sens de la levée de l'effet d'écran. Raisonnons sur un krigeage à deux auréoles. Soit à estimer la teneur z inconnue d'un panneau P à partir de la teneur u d'un échantillon central, et des teneurs x et y de deux auréoles. On prend un estimateur :

$$z = (1 - \lambda - \mu) u + \lambda x + \mu y$$

et étant déterminés par le système habituel :

$$\lambda D_1 + R \mu = N_1$$

$$\lambda R + D_2 \mu = N_2$$

où R , D_1 et D_2 , N_1 et N_2 sont donnés par les relations générales (VII, 5). "En présence d'un effet de pépité, ces cinq expressions sont majorées des quantités".

$$\delta D_1 = \frac{C_o}{v_x} + \frac{C_o}{v_u}$$

$$\delta D_2 = \frac{C_o}{v_y} + \frac{C_o}{v_u}$$

$$\delta R = \delta N_1 = \delta N_2 = \frac{C}{v_u}$$

où v_x , v_y et v_u désignent les volumes des prélèvements x , y et u . Ces accroissements se répercutent sur les valeurs de λ et μ . En particulier, si l'effet de pépité est très fort, les N_1 , D_1 , etc... sont négligeables, à la limite, devant leurs accroissements. Il reste alors :

$$\text{VII, 7) } \left[\begin{array}{l} \lambda_\theta = \frac{v_x}{v_x + v_y + v_u} \\ \mu_\theta = \frac{v_y}{v_x + v_y + v_u} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire une simple pondération par les volumes des échantillons. En général, l'effet de pépité ne sera pas aussi prononcé, mais il conduira toujours à des valeurs de λ et μ intermédiaires entre les valeurs théoriques et celles qui résultent d'une pondération par les volumes. En particulier, les effets d'écran seront toujours partiellement levés.

Le résultat asymptotique exprimé par les formules (VII, 7) est évidemment général. Quel que soit le nombre des auréoles utilisées, on a toujours, à la limite, une pondération par les volumes. En particulier, si l'on fait un krigeage complet, c'est-à-dire un krigeage par l'ensemble des n échantillons prélevés dans le gisement, considérés comme autant

d'auréoles distinctes, on obtient, quel que soit le panneau à estimer, le même estimateur asymptotique, qui n'est autre que la teneur moyenne du mélange des n échantillons prélevés. A la limite, donc, toute relation géographique est effacée et il n'y a plus d'estimation locale possible, puisque le meilleur estimateur de n'importe quel panneau coïncide avec l'estimateur du gisement entier. Dans la pratique, l'effet ne sera jamais aussi extrême, mais on observera toujours une détérioration relativement au krigeage habituel (cette étude sera complétée numériquement aux paragraphes 3, 4 et 5).

On pourrait, à l'aide d'un plan de calcul très complexe, déterminer le système de Matheron correspondant à un grand nombre d'auréoles de façon à espérer figurer le calcul et trouver des estimateurs différenciés pour chaque zone de sondages. Mais on s'aperçoit en calculant les variances d'extensions associées de l'inutilité d'une telle démarche. Dès que l'effet de pépité est prononcé, dès que par exemple $\xi = 0,5$ (dans les couches entrecroisées, échantillonnées par une seule saignée, ξ vaut de l'ordre de 0,3), le terme en C_0/v devient le plus important de tous ceux de la covariance d'extension.

Sur le plan pratique, cette constatation nous contraint à ne tolérer que des ξ faibles pour l'échantillonnage des zones à kriger.

Sur le plan théorique, on voit apparaître une approximation. Le comportement localement aléatoire des teneurs peut être traduit en disant que chaque échantillon n'occupe pas une position privilégiée (par exemple centrale), dans son panneau, mais qu'il y est implanté de façon aléatoire. On remplace le schéma rigide de reconnaissance par un schéma aléatoire stratifié équivalent, les corrélations ne sont plus considérées d'échantillon à échantillon, mais de panneau à panneau.

Il y a équivalence, en pratique entre les deux types de reconnaissance à maille rigide, et à maille aléatoire stratifiée, dès que l'effet de pépite est assez accusé. Ceux que nous avons rencontrés dans toutes les couches entrecroisées échantillonnées par sondages ou saignées uniques sont largement suffisants pour permettre cette équivalence. Nous traiterons donc le krigeage à maille régulière pour les transitions avec un faible effet de pépite, qui correspondra entre autres aux estimations des teneurs des couches reconnues par un échantillonnage fondé sur des groupes de mesures (saignées, carottages, mesures en place) effectués côte à côte, aux estimations de puissances et de quantités de métal.

On passera en revue, pour les trois valeurs du rapport $\frac{C_0}{C}$, égales à 0, 0,15 et 0,30, un certain nombre de configurations de formes de panneaux différentes, et possédant diverses lacunes dans le réseau régulier des prélèvements (paragraphe 3).

D'un autre côté, on résoudra les problèmes de krigeage aléatoire, (par. qui s'appliqueront donc indifféremment aux transitions pures reconnues par maille aléatoire stratifiée, ou au contraire aux transitions à fort effet de pépite reconnues elles aussi par maille régulière (ou évidemment à fortiori reconnues elles aussi par maille aléatoire stratifiée). Cette deuxième approche est beaucoup plus aisée car elle simplifie les cas de figures différents rencontrés par l'existence de lacunes dans les mailles régulières, et permet de condenser tous les résultats en un nombre relativement restreint de formules et d'abaques. Dans le calcul numérique, sur ordinateur, des réserves détaillées du gisement, c'est-à cette dernière méthode qu'on devra recourir.

2.2. Influence de la portée sur le krigeage

Dans le schéma de Matheron, la portée va jouer un rôle prépondérant. Elle introduit une discontinuité complètement indépendante de la reconnaissance, qui multiplie tous les cas de figure ; mais inversement, à cause de l'existence d'une portée, tous les sondages suffisamment éloignés du panneau à estimer ont vis à vis de lui le même poids. Pour les transitions pures, l'effet d'écran qu'on rencontrera dans la plupart des configurations rendra l'intérêt de cette propriété secondaire, mais dès que la régionalisation renfermera la superposition de plusieurs schémas de Matheron d'échelles différentes, une telle propriété d'équivalence de tous les sondages éloignés, qui continue évidemment de subsister, permettra de résoudre de façon relativement simple les difficultés liées à la levée d'écrans. Entre le stade de la transition pure, où les zones éloignées du gisement n'ont finalement pas d'importance sur l'estimation locale et le stade de régionalisation aléatoire, dominées par l'effet de pépité, où seule la moyenne du gisement intervient dans l'estimation de chaque panneau, on voit apparaître, lié à la portée de la transition, un niveau intermédiaire, le plus courant en pratique, où les sondages proches du panneau s'individualisent dans l'expression de son krigeage, alors que l'extérieur n'intervient plus que par sa moyenne indifférenciée.

Tout se passe comme si, aux grandes distances, la zone de transition, dépassée, jouait à son tour le rôle d'un méga - effet de pépité vis à vis des échelles supérieures. On aura donc intérêt à formuler le problème des mailles régulières en séparant bien les trois cas de figures, selon que la portée est petite vis à vis de la maille, de son ordre de grandeur, ou grande par rapport

à elle. Ce dernier cas, qui fait intervenir essentiellement la tangente à l'origine du variogramme, sera traité sans le recours au schéma de Matheron, mais uniquement à l'aide de l'expression de la tangente à l'origine supposée oblique, et des paramètres C et C_0 , les résultats du paragraphe 3 (petites mailles) et du paragraphe 4 (krigeage élémentaire) sont par conséquent plus généraux que ceux relatifs aux grandes mailles, où le schéma de Matheron intervient explicitement.

On peut se demander jusqu'où une maille peut être considérée comme petite, et l'influence de la portée négligeable. A la limite, en schéma linéaire isotrope sans effet de pépite, de $\gamma(r) = p \cdot r$, les coefficients de krigeage ne dépendent plus de la taille du panneau, mais uniquement de sa forme, et des implantations respectives des sondages avec lui, et entre eux (cela se voit immédiatement sur le système de Matheron, homogène en r , qui disparaît donc par simplification). Deux configurations homothétiques auront les mêmes krigeages. En schéma de transition, si les distances sont petites par rapport à la portée, cette propriété subsistera d'autant mieux que l'effet d'écran sera plus faible. Une constante de pépite, en effet, supprime, dès le schéma linéaire l'indépendance des λ_i vis à vis de la taille du panneau en supprimant l'homogénéité de $\gamma(r)$, et des intégrales, par rapport à r . Revenons au schéma de transition, on doit donc s'attendre quand ε croît à des variations des λ_i , en fonction de $\frac{\ell}{a}$ et $\frac{h}{a}$ de plus en plus prononcées. Vérifions sur un exemple numérique à partir de quelles valeurs des paramètres ces variations sont importantes.

Choisissons deux configurations avec assez de lacunes, de façon à attribuer du poids à l'extérieur, et nous placer dans un cas a priori défavorable. (Configurations P_1 et P_2 de la figure VII - 3). Les λ_i du système

de Matheron ont trait à chacun des sondages d'angle plus à l'ensemble indifférencié des reconnaissances extérieures.

Les panneaux P_1 et P_2 sont des carrés, et ε est successivement pris égal à 0, 0,15, et 0,30. On appelle ici "portée" a l'abscisse de l'intersection de la tangente à l'origine avec le palier, car c'est là une caractéristique qui se définit de la même façon pour tous les schémas de transition à tangente à l'origine oblique. (Quand on passera aux grandes mailles, le schéma de Matheron correspondant aura pour portée équivalente $a' = \frac{2}{3} a$).

On voit sur la figure (VII-3) que les poids de P_1 , malgré la lacune de la figure restent très constants surtout quand ε est nul ou inférieur à 0,15, tant que b/a est lui-même inférieur à $\sqrt{2}$ (limite théorique des petites mailles). Les sondages de P_2 par contre possèdent un poids λ'_1 (le même pour les deux sondages par raison de symétrie) qui varie davantage. Il n'y a rien là que de très normal, la configuration P_2 opposant un écran faible aux influences de l'extérieur.

Les résultats nous aiguillent sur deux conséquences pratiques. Pour la construction des abaques de krigeage à mailles régulières (paragraphe 3), on procèdera en déterminant les deux extrémités des courbes, selon que la plus grande distance mise en jeu dans la configuration est inférieure à la portée a ; (petites valeurs sur l'axe des x), ou, à l'opposé, selon que la plus petite distance intervenant est supérieure à la portée (grandes valeurs sur l'axe des x).

Enfin, l'étude du krigeage élémentaire des petites mailles est simplifiée ; pour les problèmes concrets à résoudre, il ne sera pas nécessaire en général de tenir compte de la légère variation de λ .

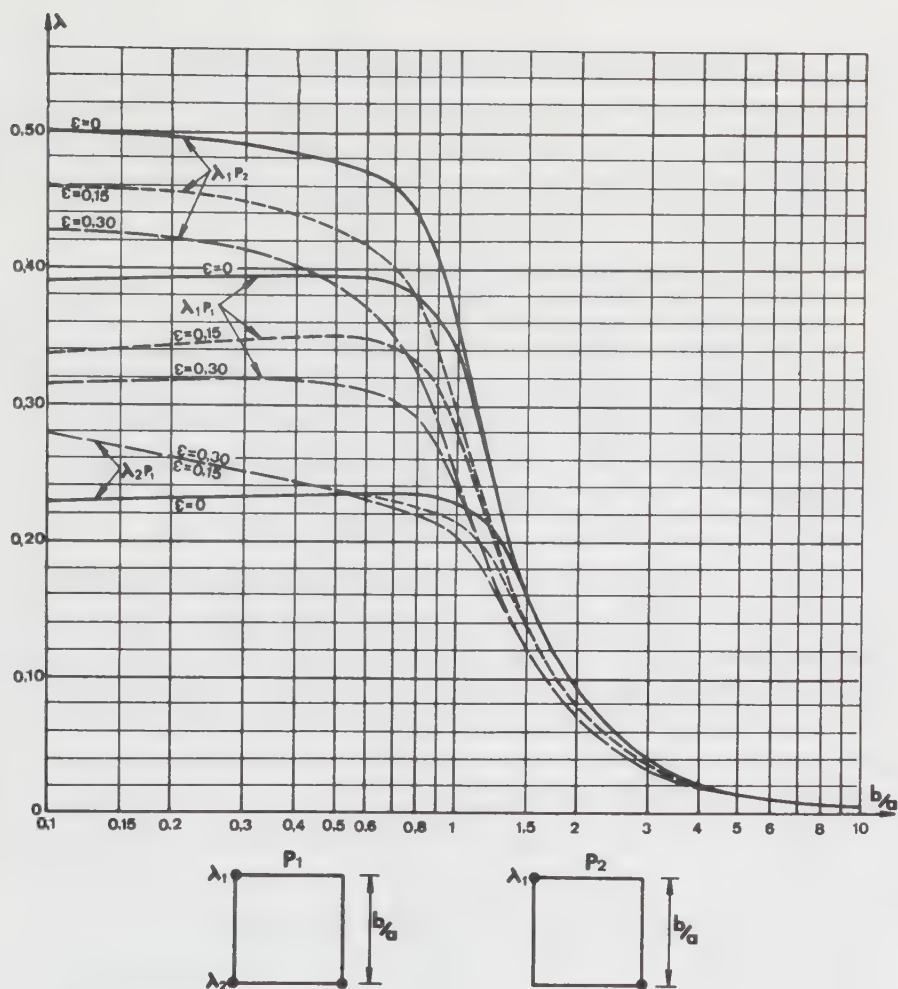


Fig.3-Variation des coefficients de krigeage de panneaux carrés en fonction de leur taille et de l'effet de pépite $\frac{\epsilon_0}{\epsilon}$.

Comme l'anisotropie est un facteur d'importance relativement secondaire, on limitera les cas de figure du krigeage élémentaire aux panneaux carrés de taille b , et l'on fixera pour le calcul $\frac{b}{a} = 0,5$, étant entendu que les résultats restent pratiquement valables pour $\frac{b}{a}$ variant de 0 à 0,7.

2.3. Influence de l'anisotropie sur le Krigeage

Il n'est pas possible de négliger à priori l'influence de l'anisotropie dans les schémas de transition usuels. On l'assimile par contre très facilement en général à une anisotropie géométrique, c'est-à-dire à une transformation qui fait passer les carrés à l'état de rectangles ou de parallélogrammes.

Etudions numériquement, en reprenant les valeurs particulières de l'exemple précédent, l'influence de ce paramètre. Fixons $\epsilon = 0$, et $h = 0,7 a$ dans la figure (VII - 4). Lorsque $\frac{\ell}{a}$ varie de 0,1 à 0,7 a, le poids du sondage n° 1 dans les quatre figures varie à son tour de la façon suivante :

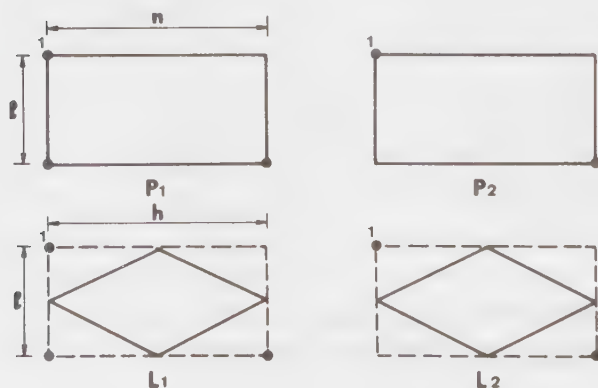


Figure III-4

Tableau : Anisotropie des rectangles et des losanges

$\frac{e}{h}$	$\lambda^1_{P_1}$	$\lambda^1_{L_1}$	$\lambda^1_{P_2}$	$\lambda^1_{L_2}$
1/7	0,487	0,489	0,496	0,498
2/7	0,469	0,474	0,490	0,495
3/7	0,451	0,458	0,483	0,491
4/7	0,433	0,444	0,477	0,488
5/7	0,417	0,429	0,471	0,484
6/7	0,403	0,417	0,465	0,481
7/7	0,392	0,407	0,460	0,478

Il résulte de ce tableau que le facteur d'anisotropie n'est pas négligeable mais que, avec une précision de un pour cent, on peut kriger un losange avec les mêmes poids que le rectangle correspondant. Cette particularité, confirmée par bien d'autres applications numériques, qu'il est inutile de rapporter, est extrêmement commode et étend largement le domaine d'application des abaques de krigeage. En particulier, si le rectangle de base est un carré, il y a équivalence entre le réseau des quatre sondages d'angle et du sondage central du carré de côté a (comportant éventuellement des lacunes) et, le réseau du sondage central et de la première auréole externe du carré ayant pour sommets les milieux des côtés du précédent.

On présentera dans les abaques le facteur d'anisotropie sous forme d'un correctif à rajouter à la valeur des λ_i correspondant à la configuration carrée.

2.4. Influence de l'amplitude C sur le krigeage

C n'intervient dans la détermination des poids λ_i que par le rapport $\mathcal{E} = \frac{C_0}{C}$. Deux $\gamma(h)$ déduits l'un de l'autre par affinité d'axe oy donneront lieu à des krigeages identiques.

La variance σ_K^2 de krigeage, au contraire, est proportionnelle à C, amplitude totale de la transition ; la formule (VII, 6) présente σ_K^2 comme la différence entre la variance d'extension du nième sondage (ici l'ensemble des reconnaissances extérieures) au panneau diminuée de la somme $\sum \lambda_i N_i$. On verra que le calcul des variances de krigeage est extrêmement simple dans le cas des mailles et panneaux réguliers, un peu plus délicat en krigeage élémentaire, à cause de la multiplicité des configurations possibles, qui imposera certaines approximations, et enfin d'une expression compliquée, qu'on tabulera, en krigeage aléatoire.

3. KRIGEAGE DES PANNEAUX REGULIERS RECONNUS A MAILLE RECTANGULAIRE

3. 1. Principe et validité du calcul

Nous allons maintenant formuler explicitement les coefficients de krigeage du panneau d'influence d'un sondage dans un gisement reconnu suivant tous les types de mailles définis au paragraphe 1.

Dans le cas le plus important en pratique, celui des mailles régulières, nous nous définirons un panneau rectangulaire P de longueur et largeur ℓ et h

reconnu par les 5 sondages aux sommets et au centre (figure VII - 5), et par la moyenne indifférentiée du reste des reconnaissances du gisement.

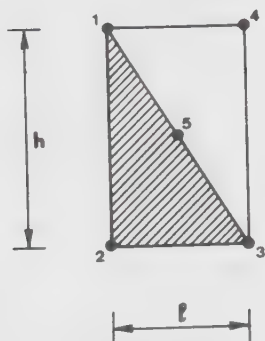


Figure VII-5
Panneau type du krigeage rég

On supposera dans les calculs numériques que ces reconnaissances sont en nombre élevé, ce qui permettra de remplacer dans le krigeage du panneau P les sondages extérieurs par la moyenne de toutes les reconnaissances du gisement. La figure (VII - 5) représente la configuration complète, mais il arrivera que certaines valeurs n'existent pas, par absence d'échantillons ; en pareil cas, chaque configuration, plus ou moins lacunaire, fera l'objet d'un calcul spécial.

L'absence d'échantillonnage peut provenir de deux causes bien différentes .

- La maille n'a pas été complètement réalisée pour des raisons techniques indépendantes de la minéralisation, qui continue de se poursuivre. Le krigeage reste alors parfaitement justifié et applicable.

- Le réseau de sondages est complet, mais le panneau est en bordure de gisement, au sens géologique du terme, c'est-à-dire au voisinage d'une faille, ou en terminaison de faciès lithologique. Il ne s'agit plus alors d'un problème de krigeage seul, mais aussi d'un problème géométrique : l'estimation de l'aire minéralisée à l'intérieur du panneau P. En pareil cas, on se laissera guider par l'intuition géologique et on tracera, par interpolation graphique, la frontière moyenne du faciès à travers le panneau P, et l'on krigerà cette partie là seulement et uniquement à l'aide des sondages intérieurs à l'aire minéralisée (mais éventuellement extérieurs à P). Cette remarque ne vaut, insistons bien sur ce point, que pour des changements de nature géologique de la minéralisation. Une couche entrecroisée qui perd progressivement sa minéralisation par substitution d'oolithes calcaires aux oolithes ferrifères ne constitue pas, malgré son appauvrissement, un changement de faciès ; par contre, une zone qui au contact d'une faille, ou d'un affleurement, s'est localement enrichie par altération superficielle n'est plus, à proprement parler, krigeable. Enfin, quand on parlera de teneur dans les pages qui suivent, il est évident que cela n'empêche en rien tous les résultats d'être immédiatement transposables à n'importe quel paramètre minier représentable par un schéma de transition, et plus particulièrement, en ce qui concerne les minerais lorrains, aux puissances des couches et surtout aux accumulations (produit puissance . teneur).

On utilisera pour tout le calcul des schémas de tangente à l'origine $\frac{C}{a}$, où C est la variance à priori de la transition. Dans le cas des grandes mailles, les calculs nous obligeront à préciser le modèle théorique qu'on

prendra alors, défini par le schéma de Matheron de tangente à l'origine $\frac{C}{a}$, à savoir :

$$\gamma(x) = C \left(\frac{x}{a} - \frac{4}{27} \frac{x^3}{a^3} \right) \quad \text{pour } x < \frac{3}{2} a$$

$$\gamma(x) = C \quad \text{pour } x \geq \frac{3}{2} a$$

Il faudra donc bien faire attention, à propos du calcul de certaines variances de krigeage qui renvoient au Chapitre IV de lire les abaques de ce chapitre, en les rapportant à la portée $a' = \frac{3}{2} a$, où a est défini comme ci-dessus.

Les trois cas des mailles grandes, petites et moyennes seront traités successivement, et différemment, suivis d'un réseau d'abaques qui les rassemble. Le paragraphe se terminera par le calcul des variances de krigeage. A chaque configuration obtenue à partir de la figure (VII - 5) et d'éventuelles lacunes on fera correspondre systématiquement les trois types de panneaux R, T, L de la figure (VII- 6). On a vu que R et L étaient équivalents, il ne subsistera donc que deux types d'abaques, rectangulaires et triangulaires.

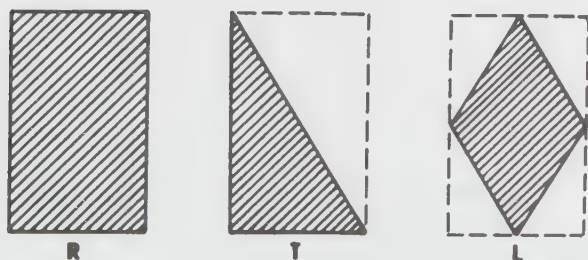


Figure VII-6
Mailles moyennes et grandes
types des panneaux krigés.

3.2. Cas des grandes mailles

Traisons le cas des grandes mailles, relativement aisé à résoudre, de façon formelle. On pourra ainsi étudier la variation des principaux paramètres indépendamment les uns des autres.

En réseau centré, la maille est dite grande si les côtés ℓ et h sont supérieurs au triple de la portée a ; en réseau fermé (sondages d'angle uniquement), il suffit que ℓ et h soient supérieurs à $\frac{3}{2}a$ (configurations rectangulaires) ou $\frac{3}{4} \sqrt{\ell^2 + h^2} > a$ (configurations triangulaires).

On peut, par superposition, obtenir le krigeage de tout l'ensemble des configurations à partir de quelques unes d'entre elles, présentées, avec l'expression de leurs variances et covariances en schéma de Matheron dans le tableau (VII - 7) ci-dessous.

Tableau VII-7 - Configurations de base du krigeage à grandes mailles

<u>Réseau centré</u>		<u>Réseau fermé</u>	
	$\sigma_x^2 = C (1 + \epsilon)$		$\sigma_x^2 = \frac{C}{4} (1 + \epsilon)$
			$\sigma_x^2 = \frac{C}{3} (1 + \epsilon)$
			$\sigma_x^2 = \frac{C}{2} (1 + \epsilon)$
	$\sigma_{xz}^2 = \frac{9}{20} \approx \frac{a^2}{\ell h}$		$\sigma_x^2 = C (1 + \epsilon)$
			$\sigma_{xz}^2 = \frac{9}{80} \approx \frac{a^2}{\ell \cdot h}$
(pour toutes les configurations à sondages d'angles)			
<u>Réseau centré et réseau fermé</u>			
$\sigma_y^2 = \frac{C}{n} (1 + \epsilon)$	$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$		
$\sigma_z^2 = \frac{9}{20} \approx \frac{a^2}{\ell h} - \frac{9}{16} \cdot \frac{a^2}{\ell h} \left(\frac{a}{\ell} + \frac{a}{h} \right) + \frac{243}{1120} \cdot \frac{a^4}{\ell^2 h^2}$			

Dans les notations du tableau (VII-7), x représente la teneur du sondage central, ou de la moyenne des sondages d'angle présents, y la teneur moyenne des n sondages extérieurs et z celle du panneau. On prendra un estimateur de la forme :

$$z^* = (1 - \lambda) x + \lambda y$$

Le système de Matheron, immédiat à résoudre, aboutit à l'expression :

$$\lambda = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_{zy} - \sigma_{xy} - \sigma_{xz}}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{xy}}$$

D'où compte tenu des valeurs du tableau (VII - 7), il vient pour la configuration centrée :

$$\lambda = \frac{1 - \frac{9}{20} \pi \cdot \frac{a^2}{\ell h} + \varepsilon}{(1 + \frac{1}{n}) (1 + \varepsilon)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \sigma_K^2 &= 1 + \varepsilon - \frac{9}{20} \pi \frac{a^2}{\ell h} + \frac{9}{16} \cdot \frac{a^2}{\ell h} \left(\frac{a}{\ell} + \frac{a}{h} \right) + \frac{243}{1120} \frac{a^4}{\ell^2 h^2} \\ &- \frac{\left[1 + \varepsilon - \frac{9}{10} \pi \frac{a^2}{\ell h} \right]^2}{(1 + \frac{1}{n}) (1 + \varepsilon)} \end{aligned}$$

Pour les divers réseaux fermés, appelons V le nombre des sondages, qui varie de 1 à 4 inclus, et λ le poids d'un sondage :

$$(VII, 9) \quad \lambda = \frac{\frac{1 + \varepsilon}{\nu} - \frac{9}{80} \tilde{\pi} \frac{a^2}{\ell \cdot h}}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\nu} \right) (1 + \varepsilon)}$$

$$(VII, 10) \quad \frac{1}{C} \frac{2}{K} = \frac{1 + \varepsilon}{\nu} - \frac{9}{20} \tilde{\pi} \frac{a^2}{\ell \cdot h} + \frac{9}{16} \cdot \frac{a^2}{\ell h} \left(\frac{a}{\ell} + \frac{a}{h} \right) - \frac{243}{1120} \frac{a^4}{\ell^2 h^2}$$

$$- \frac{\left[\frac{1 + \varepsilon}{\nu} - \frac{9}{80} \tilde{\pi} \frac{a^2}{\ell \cdot h} \right]^2}{(1 + \varepsilon) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\nu} \right)}$$

Ces résultats appellent quelques remarques. Tout d'abord, dans les deux expressions de λ (VII, 8) et (VII, 9), on constate que le panneau P n'intervient que par sa surface $\ell \cdot h$. Ce résultat s'interprète très bien si l'on se place en schéma de dilution et qu'on suppose n grand. Le poids du sondage central, dans le réseau centré est alors $\frac{9}{20} \tilde{\pi} \frac{a^2}{\ell \cdot h}$; $\frac{9}{20} \tilde{\pi} \cdot a^2$ n'est autre chose que l'aire moyenne des cercles découpés dans la régionalisation de dilution à 3 dimensions par le plan où sont implantées les figures à kriger. A la limite, quand $n \rightarrow \infty$, le poids attribué au sondage central tend vers l'aire du compartiment dont il est extrait rapporté à la surface $\ell \cdot h$ du panneau à estimer ; et en effet ce sondage représente parfaitement ce compartiment, il est même le seul de tous les échantillons, par construction, à le représenter. La présence de l'effet de pépité réduit ce poids dans le rapport $\frac{C}{C + C_0}$, conformément à la règle générale de brouillage du processus par la transition à petite échelle ; si $C_0 = C$ et que les deux transitions ont la même amplitude, le poids du centre est réduit de moitié.

Dans le réseau fermé, la même remarque s'applique, à ceci près que les V sondages en présence se partagent également le poids précédemment attribué au sondage central.

La première conséquence qu'on peut tirer de ces formules est relative à l'anisotropie. On voit que seule la surface $\ell \cdot h$ du rectangle intervient, quel que soit le rapport d'anisotropie $\frac{\ell}{h}$. La tabulation des abaques, qui porte en abscisse le côté b du panneau supposé carré, devra être lue aux grandes mailles en remplaçant b par $\sqrt{\ell \cdot h}$; et la correction d'anisotropie qui accompagne chaque abaque n'a plus de sens pour les grandes valeurs de ℓ et h .

On peut, au vu des variances de krigeage, tirer une autre conséquence des formules (VII, 8) et (VII, 9). En effet, l'on a pour n infini et $V = 4$

$$(VII, 11) \quad \frac{1}{C} \cdot \sigma_{K \text{ centré}}^2 - \frac{1}{C} \sigma_{K \text{ fermé}}^2 = \frac{3}{4} \left[1 + \epsilon - \frac{(1 + \epsilon - \frac{9}{20} \cdot \pi \frac{a^2}{\ell \cdot h})^2}{(1 + \epsilon)} \right]$$

dans le domaine de définition de ℓ et h en grandes mailles centrées, (VII, 11) est toujours positif. En schéma de Matheron, quel que soit l'effet de pépité, on a toujours intérêt à kriger les grands panneaux à partir d'un réseau fermé.

Le calcul des configurations rectangulaires mixtes (réseau centré et fermé, avec lacunes), et de leurs équivalents triangulaires, est immédiat.

On supposera en pratique que n est infini. On voit sur les expressions (VII, 8) et (VII, 9) que dès que n dépasse 40, $\frac{1}{C+C_0} \sigma_K^2$, et λ ne varient sensiblement plus en fonction de n ; or, cette taille de 40 qu'on retrouvera pour tous les types de mailles correspond à un gisement bien petit. Cette approximation faite, les formules se simplifient ; on s'aperçoit par superposition que pour toute configuration rectangulaire le sondage central, s'il est présent pèse toujours le même poids :

$$(VII, 12) \quad \lambda' = \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{9}{20} \approx \frac{a^2}{\ell \cdot h}$$

et chaque sondage d'angle présent vaut $\frac{\lambda'}{4}$.

En ce qui concerne les configurations triangulaires, on vérifie immédiatement que le poids λ' du sondage central reste le même, celui du sondage sommet de l'angle droit vaut $\frac{\lambda'}{2}$, ceux des deux autres sommets $\frac{\lambda'}{4}$ et celui du sondage n'appartenant pas au triangle zéro. Encore ici les lacunes possibles ne changent rien au poids des sondages restants.

3.3. Cas limite des petites mailles

Les formules précédentes ne sont valables que pour une maille supérieure au triple de la portée en réseau centré, ou supérieure à $\frac{3}{2}$ de la portée en réseau fermé. Elles s'appliquent donc dans les régionalisations du type de celles rencontrées en Lorraine à des panneaux de 800 à 400 mètres de côté, c'est-à-dire d'un autre ordre de grandeur que la maille courante d'échantillonnage, qui se situe aux environs de 100 mètres.

Dans une régionalisation de portée moyenne, ici 300 mètres, le problème se pose tout à fait différemment. Tout se passe comme si la fonction intrinsèque était une droite de pente $\frac{C}{a}$ pour les 5 échantillons 1, 2, 3, 4, 5 de la figure (VII, 5) et simultanément comme si elle était une constante pour tous les autres échantillons. Prenons par exemple la figure (VII-8). Le panneau hachuré P est un carré de 150 mètres de côté et la portée a vaut ici 300 mètres. Pratiquement, la covariance de 10, 11 et 12 avec P se réduit à une constante, avec une approximation d'autant meilleure que l'effet d'écran est plus accusé.

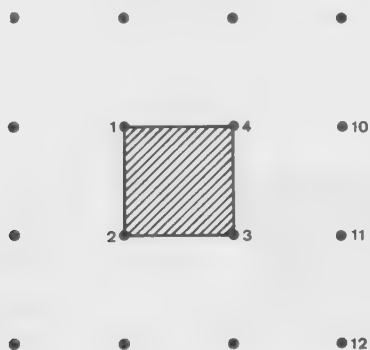


Figure VII-8

D'ailleurs si, simultanément, l'effet d'écran est fort, ou en d'autres termes s'il n'y a pas de variabilité interne et que la maille d'échantillonnage est très petite (au moins 4 fois plus petite que la portée), on atteint le cas extrême du schéma de transition. Les sondages situés au-delà de la deuxième auréole sont négligés, la fonction $\gamma(h)$ se réduit à une droite de pente $\frac{C}{a}$, et passant par l'origine. Ce cas est aussi un cas limite du schéma de WIJSIEN,

qui a été tabulé par G. MATHERON (traité de géostatistique, tome 2) et A. CARLIER (Contribution à l'estimation des gisements d'uranium).

Nous reproduisons ici, en transposant les notations, les résultats déterminés par ces auteurs. On verra du reste que la position du panneau par rapport à ses sondages n'est pas exactement celle que l'usage dans les mines de fer de Lorraine nous a poussé à adopter. En effet, l'étude du krigeage en schéma de WIJSIEN a été poursuivie pour des réseaux centrés et non fermés (moins d'éventuelles lacunes) autour d'un panneau disposé comme l'indique la figure (VII - 8 bis). Mais on a vu au paragraphe 2 que cela n'avait pratiquement pas d'importance.

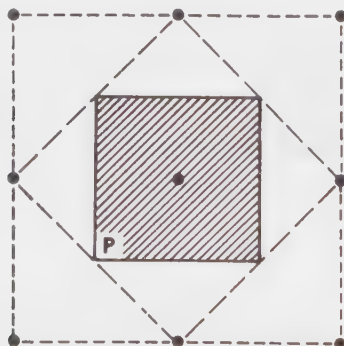


Figure VII-8 bis

sondage central A, teneur u
première auréole B, teneur moyenne
deuxième auréole C, teneur moyenne

Les trois approximations requises pour utiliser ces résultats sont :

- 1) $\varepsilon \sim 0$ il n'y a pas d'effet de pépité
- 2) $h = b$ le schéma est isotrope

(ou ce qui est identique, son anisotropie géométrique est corrigée par une maille adaptée).

- 3) a est très grand : la plus grande des distances mises en jeu, variable suivant la configuration, mais qui atteint au maximum 4,23 b est inférieure à la portée a .

L'isotropie du schéma permet de ramener le nombre d'estimateurs à 2, λ pour la première auréole, et μ pour la seconde, qu'il y ait ou non des lacunes. Si u est la teneur du sondage central, v celle de la première auréole et w celle de la seconde, on écrira l'estimateur du panneau sous la forme :

$$z^* = (1 - \lambda - \mu) u + \lambda v + \mu w$$

$$z^{*'} = \lambda' v + (1 - \lambda') w$$

selon que le sondage central A est présent ou absent, pour la même configuration des autres sondages. σ_K^2 et $\sigma_{K'}^2$ sont les variances de krigeage correspondantes.

Les valeurs numériques ont deux limitations importantes. Elles supposent $\xi = 0$ et ne pourront par conséquent être utilisées que pour des puissances ou des accumulations (de minerais lorrains entrecroisés) ou pour des minerais argileux. On lèvera en partie cette difficulté dans l'étude du krigeage élémentaire.

La seconde limitation est due à l'isotropie. On peut la contourner en complétant les résultats précédents par leurs équivalents les plus anisotropes ce qui permettra, par interpolation de traiter les cas intermédiaires.

3.4. Cas limite des mailles moyennes unidimensionnelles

Le rectangle ℓ , h se réduit au segment de longueur h . On appelle x la teneur de l'échantillon central, y_1 et y_2 celles des deux échantillons périphériques, et z celle du reste de l'échantillonnage de la galerie. La moyenne de y_1 et y_2 est y , et P est la teneur du segment. La résolution du système de Matheron redevient simple, on la calculera de façon formelle et numérique simultanément.

On établit simplement le formulaire des covariances :

$$\sigma_z^2 = \sigma_{zy} = \sigma_{zx} = \sigma_{zp} = -C$$

$$\sigma_{yp} = -X(h)$$

$$\sigma_{xp} = -X\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$\sigma_x^2 = \epsilon \cdot C$$

$$\sigma_y^2 = \epsilon' C = \begin{cases} \epsilon \cdot C & \text{si } y \text{ est réduit à } y_1 \\ \frac{\epsilon C}{2} - \frac{\gamma(h)}{2} & \text{si } y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

Si on prend pour estimateur de P la teneur

$$t = \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu) z$$

le système de Matheron s'écrit :

$$R_x = \sigma_x^2 - 2\sigma_{xz} + \sigma_z^2 = 1 + \varepsilon$$

$$R_y = \sigma_y^2 - 2\sigma_{yz} + \sigma_z^2 = 1 + \varepsilon'$$

$$\text{II, 13)} \quad R_{xy} = \sigma_{xy} - \sigma_{xz} - \sigma_{yz} + \sigma_z^2 = 1 - \frac{h}{2}$$

$$N_x = \sigma_{px} - \sigma_{pz} - \sigma_{xz} + \sigma_z^2 = 1 - \frac{h}{4}$$

$$N_y = \sigma_{py} - \sigma_{pz} - \sigma_{yz} + \sigma_z^2 = 1 - \frac{h}{2}$$

$$\text{VII, 14)} \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{N_x R_y - N_y R_{xy}}{R_x R_y - (R_{xy})^2} \\ \mu = \frac{N_x R_y - N_y R_{xy}}{R_x R_y - (R_{xy})^2} \end{array} \right.$$

Les résultats formels et numériques sont donnés en troisième partie (formules VII, 15 à VII, 19).

3.5. Mailles moyennes

La jonction entre les deux types extrêmes précédents va être établie moyennant certaines hypothèses. Le panneau P est reconnu d'une part par les cinq sondages classiques (centre et angles), et de plus par la moyenne indifférentiée des reconnaissances extérieures. On suppose donc toutes ces dernières suffisamment loin et écartées les unes des autres pour ne faire intervenir, en ce qui les concerne, que des distances supérieures à la portée. Parallèlement, on impose à la plus grande distance mise en jeu dans la configuration elle-même, à savoir $\sqrt{\ell^2 + h^2}$ d'être plus petite que la portée. Cette approximation, qui semblerait à première vue un peu forcée, n'est en fait pas très exigeante. Dans le domaine d'utilisation du krigeage régulier, les écrans sont suffisamment prononcés pour qu'il devienne inutile de multiplier les auréoles. (Nous en donnerons un exemple ci-dessous). Quant à l'hypothèse sur la taille maximale du panneau lui-même, elle représente plutôt, à vrai dire, la ligne de démarcation entre les grandes mailles et les mailles moyennes qu'une hypothèse. Sur le plan du calcul numérique lui-même, cette ligne de démarcation s'avère assez commode.

Le calcul des λ_i a été obtenu par voie numérique, à l'aide d'un ordinateur. Le théorème de superposition des krigeages est ici fort utile. Découpons le panneau P, rectangle de taille $\ell \cdot h$, en n^2 carreaux élémentaires rectangulaires de taille $\frac{\ell}{n} \cdot \frac{h}{n}$. Dès que n est assez grand, on peut assimiler les covariances entre sondages et panneaux élémentaires, à celles qui relient ces sondages aux centre de gravité des panneaux ; d'autant plus que si on choisit n pair, aucun sondage, même le central, ne sera interne à aucun panneau élémentaire, mais au pire, sondage d'angle.

A titre d'illustration, considérons la configuration suivante, définie en schéma isotrope ($\frac{\ell}{a} = \frac{h}{a} = 0,05$), où seul le sondage n° 4 est absent :

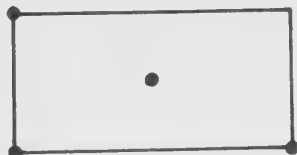


Figure VII-10

Si l'on suppose le nombre des sondages extérieurs grand, les pondérateurs calculés par superposition de krigeages élémentaires sont :

Tableau VII - 11

Nombre des carreaux élémentaires	Effet de pépité ε	Sondage n° 1	Sondage n° 2	Sondage n° 5
64	0	0,1947	0,1141	0,4953
64	0,1	0,2377	0,2049	0,2952
64	0,2	0,2346	0,2151	0,2674
196	0	0,1951	0,1143	0,4942
196	0,1	0,2378	0,2049	0,2950
196	0,2	0,2346	0,2152	0,2673
400	0	0,1952	0,1144	0,4940
400	0,1	0,2378	0,2050	0,2949
400	0,2	0,2346	0,2158	0,2673

Le poids du sondage 3, par symétrie, est celui du sondage 1. On voit que la précision du millième, dans les poids, est atteinte pour un découpage en 64 carreaux seulement. Les valeurs théoriques, calculées par ailleurs, sont identiques, jusqu'à la quatrième décimale au moins, aux résultats numériques obtenus avec $n^2 = 400$. C'est à la suite de ces résultats que la valeur $n^2 = 64$ a été retenue, elle fixe la précision de tous nos poids à 1 pour mille.

Indépendamment du problème de l'estimation du nombre de carreaux élémentaires, les résultats du tableau précédent (VII - 11) appellent quelques remarques. On assiste à un très bel effet de transfert d'influence. Le poids du sondage n° 4, absent, a été en grande partie reporté sur celui des numéros 1 et 3, qui s'élève alors à 19 % ($\mathcal{E} = 0$) alors que le sondage n° 2 n'a pour son compte que 11 % du poids total. Un autre point est l'importance extrême de $\mathcal{E} = \frac{C_0}{C}$. On a vu, à propos de l'échantillonnage du minerai en place que $\mathcal{E}$ prenait dans la majorité des couches exploitées des valeurs de l'ordre de 0,2 à 0,4 ; et qu'en pareil cas, un échantillonnage très proprement réalisé, et à l'aide de trois saignées, ou trois sondages correctement disposés, permettrait de réduire $\mathcal{E}$ à 0,1. On voit maintenant que même dans ce cas, le réseau des corrélations spatiales est fortement endommagé par la variabilité interne résiduelle. Ainsi, par rapport à la transition pure ($\mathcal{E} = 0$), la superposition d'une toute petite variabilité ($\mathcal{E} = 0,1$) fait presque disparaître le transfert d'influence du sondage n° 4 sur les sondages numéros 1 et 3, qui ont maintenant à 3 % près le même poids que le sondage n° 2. Sur le sondage central, cette destructuration est encore plus sensible, puisqu'elle fait chuter son importance de 49 % à 29 %, chute qui s'amortit ensuite puisque pour $\mathcal{E} = 0,2$ le sondage central n° 5 emprunte encore 26 % du poids total.

Lié à cet effet de pépité apparait l'importance de l'environnement externe. En transition pure ($\mathcal{E} = 0$), elle est réduite à 0,1 %, mais quand $\mathcal{E}$ prend les valeurs 0,1 et 0,2, elle s'élève jusqu'à 2,5 et 4,8 %, ce qui n'est plus négligeable. Cet effet d'écran particulièrement prononcé en transition pure est dû en partie au nombre relativement faible des lacunes. On a vu, à propos des grandes mailles que, même en transition pure, si seul le sondage central était présent, l'extérieur acquerrait un poids de l'ordre de 20 %. L'effet d'écran devient important dès qu'il y a moins de trois lacunes. Cette remarque justifie à posteriori toutes les approximations que nous avons formulées sur l'environnement externe, à savoir qu'il était suffisamment éloigné et qu'il comportait un nombre de sondages suffisamment grand. Ce nombre a été fixé à 40 reconnaissances au moins dans le cas des grandes mailles, où l'effet d'écran est particulièrement peu accusé, on peut donc sans encombre le conserver ici, comme ordre de grandeur.

Les abaques correspondant aux mailles moyennes sont portés en troisième partie (fig. 14 à 58), illustrés par l'exercice-type E.

De même, on y a placé le calcul des variances de krigeage, qui est une simple application numérique, ou formelle de la formule (VII, 6).

4. LE KRIGEAGE ÉLÉMENTAIRE

4.1. Principe et calcul

Le krigeage élémentaire n'est qu'un cas particulier de l'étude des petites mailles. On sait, d'une part, que dans ce domaine la portée influe peu sur les valeurs numériques des λ_i , et d'autre part que l'exploitation des quartiers, à l'échelle trimestrielle en Lorraine, se situe au niveau des

petites mailles. Par contre, cette exploitation progresse suivant un front géométriquement très déchiqueté, qu'on ne saurait nullement assimiler à un simple rectangle. Enfin, il n'y a jamais plus de trois ou quatre prélèvements en couches implantés autour de la zone qu'on exploite.

Il a donc paru extrêmement commode de profiter de la superposition des krigeages pour découper les configurations de base en petits carreaux krigés individuellement. Il suffit ensuite de superposer à ce découpage le plan des travaux miniers pour connaître l'importance à donner à chacun des sondages en chaque point de ces travaux. Par sommation, on calcule l'estimation moyenne de la production. Dans le but de ne pas multiplier inutilement les abaques ont été fixées une fois pour toutes la taille et l'anisotropie de la figure des prélèvements : $h = \ell = 0,5 a$. L'effet de pépité, par contre, qui est de loin le paramètre le plus perturbateur, a été pris, comme plus haut, égal à 0 ; 0,15 et 0,30.

Le calcul des variances de krigeage demande à être reconduit pour chaque forme des panneaux. En ce qui concerne n_1 , on remplacera le terme $H\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right)$ par la distance moyenne du sondage i aux centres de gravité des éléments qui interviennent dans la marqueterie de krigeage. En ce qui concerne la variance d'extension des travaux krigés reconnus par les prélèvements extérieurs, on cherchera, dans la mesure du possible à superposer au mieux un rectangle à ces travaux, qu'on considérera comme leur équivalent. Si les travaux sont trop discontinus, on négligera les parcelles les plus petites pour n'appliquer la règle précédente qu'au bloc majeur d'exploitation, ce que faisant on ne pourra que surestimer la variance d'extension.

Les abaques correspondants sont portés en troisième partie (fig. 60 à 71) ainsi que l'exercice F, qui donne un exemple de manipulation du krigeage élémentaire.

5. LE KRIGEAGE ALEATOIRE

5.1. Définition

Les plans de krigeage que nous avons étudiés jusqu'à présent reposaient sur un groupe d'hypothèses extrêmement exigeantes. Nous avons d'abord imposé à la partie intrinsèque de la régionalisation de posséder une fonction $\gamma(h)$ assimilable à la somme de plusieurs schémas de Matheron d'échelles différentes, restriction due au thème général de cet ouvrage. Mais nous avons aussi imposé à la reconnaissance une maille rigide, au panneau une implantation privilégiée vis à vis de cette maille, et, toujours au panneau, un nombre limité de formes, très particulières.

En pratique minière, de telles exigences peuvent être parfaitement remplies, tout du moins à une certaine échelle. Dans les méthodes d'exploitation par traçage et dépilage, comme en Lorraine, tant l'individualisation des panneaux que la disposition de l'échantillonnage sont commandées par l'implantation des galeries de traçage. Dès qu'on échantillonne à maille régulière, la disposition des prélèvements au fond se situe très vite d'elle-même, aux sommets ou aux milieux des côtés des panneaux délimités par les galeries, ou de panneaux multiples de ceux-ci.

Cette dépendance étroite du panneau vis à vis de sa reconnaissance n'est pourtant pas une loi générale. Déjà, un schéma de reconnaissance régulier peut fort bien comporter des panneaux de forme quelconque, implantés de façon aléatoire par rapport à lui. Les frontières d'un stot de protection,

d'une limite de concession, d'un changement de faciès, ou de plan d'exploitation, introduisent autant d'irrégularités que le krigeage très rectangulaire que nous avons développé jusqu'à présent ne peut pas prendre en compte. De plus, non seulement les panneaux, mais les mailles elles-mêmes risquent de se trouver sujettes à des irrégularités plus ou moins fortes. Qu'on s'intéresse, en Lorraine par exemple, non plus aux prélèvements en couche, mais aux sondages qui traversent toute la formation ferrifère, et il ne sera presque plus jamais possible d'y trouver des mailles régulières. Par contre, sur d'assez grands ensembles se dessineront des mailles aléatoires stratifiées, de densité variable d'une de ces zones à l'autre ; enfin, dans certains cas limites, heureusement rares, des réseaux de reconnaissance resteront aléatoires.

Ce désaccord qui s'introduit entre le panneau et sa reconnaissance dans le cas des champs fixes à implantation flottante, et qui empire quand la reconnaissance elle-même perd sa rigidité, va pouvoir s'exprimer à travers le krigeage aléatoire. Que l'on ne se fasse pas d'illusion ; si cette nouvelle approche de l'estimation locale est plus générale que la précédente, puisqu'elle s'applique à toutes les mailles, elle perd nécessairement ailleurs - en efficacité et en précision - ce qu'elle a gagné en généralité.

5.2. Formulation du krigeage aléatoire

Séparons, pour la commodité de l'exposé, les deux problèmes de l'implantation de la reconnaissance, et du panneau à kriger.

Soit un réseau de reconnaissances implanté selon le schéma de maille aléatoire stratifiée de rectangle de base ℓ , h . Tout se passe comme si l'aire à reconnaître avait été découpée suivant le carroyage rectangulaire

de côté ℓ et h , et que dans chaque rectangle unitaire avait été implanté un sondage suivant la loi de probabilité uniforme. La figure (VII - 73) fournit un exemple de l'apparence d'un tel champ de sondages. Dans ces conditions, proposons-nous de kriger un point du champ. Dans le système de Matheron (VII - 5), toutes les covariances σ_{ij} entre les sondages i et j vont être remplacées par les covariances entre les panneaux qu'occupent le sondage i et le sondage j . Cela simplifie énormément le calcul de telles covariances. Dès lors qu'on se limitera à deux ou trois auréoles autour du point à kriger elles se réduiront à trois expressions : la covariance entre 2 rectangles ℓ, h qui ont en commun le côté ℓ ; (panneaux $p_2 p_3$ sur la figure VII - 73), ou le côté h (panneaux $p_1 p_2$ sur la figure VII - 73) ou enfin un seul sommet en commun (panneaux $p_1 p_3$ sur la figure VII - 73). Faisons maintenant une seconde hypothèse, admissible avec les mêmes approximations que l'hypothèse de structure aléatoire stratifiée de la maille, à savoir que le point à kriger n'est pas déterminé, mais est lui-même implanté de façon aléatoire à l'intérieur du petit panneau ℓ, h où il se trouve. Cela revient à attribuer

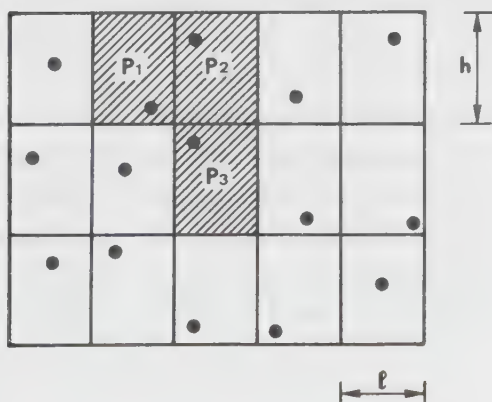


Figure VII-73
Exemple de maille
aléatoire stratifiée

à tous les points du même panneau le même krigeage, ou encore à dire que la plus petite unité différenciable à l'aide du mode de reconnaissance adopté est précisément le panneau (ℓ, h) . Dans ces conditions, non seulement les covariances du type σ_{ij} entre deux sondages, nécessaires pour la résolution du système de Matheron, mais toutes les covariances et variances à calculer se ramènent à des covariances ou des variances de rectangles très simplement disposés les uns par rapport aux autres. Le krigeage aléatoire débouche alors sur un nombre très restreint de configurations, fonction des auréoles choisies, et dont les coefficients de chaque panneau sont finalement exprimables à l'aide de deux ou trois formules seulement. Voilà, décrites à propos des mailles aléatoires stratifiées, les principales approximations du krigeage aléatoire. Le mode de raisonnement s'étend de lui-même aux mailles purement aléatoires, comme aux mailles aléatoires stratifiées possédant des lacunes, ou des groupes de plusieurs sondages dans un même rectangle (ℓ, h) . Dans le cas de ces dernières, intermédiaires entre l'aléatoire pur et l'aléatoire stratifié vrai, les rectangles (ℓ, h) ont encore une signification liée au pseudo-ordre de la répartition des reconnaissances ; dans les dispositions purement aléatoires les rectangles (ℓ, h) deviennent arbitraires et ne sont plus là que pour définir une grille de panneaux, classes d'équivalences de krigeages.

Parlons maintenant de ces panneaux plus précisément. La seconde hypothèse que nous avons formulée plus haut, relative à la position aléatoire dans (ℓ, h) du point à kriger, recouvre en réalité, à cause du théorème de superposition des krigeages, une hypothèse sur l'emplacement du panneau à estimer, qu'on suppose ici implanté de façon aléatoire dans le gisement. Appelons $\tilde{\pi}$ le panneau à kriger, il recoupe les quatre rectangles (ℓ, h) ,

p_1 p_2 p_3 et p_4 (figure VII - 74) suivant les intersections $\tilde{\pi}_1$ $\tilde{\pi}_2$ $\tilde{\pi}_3$ et $\tilde{\pi}_4$. Chacune de ses quatre intersections sera supposée vérifier les conditions d'implantation dans son rectangle respectif exprimées ci-dessus ; $\tilde{\pi}_1$ aura le même coefficient de krigeage que p_1 , $\tilde{\pi}_2$ que p_2 , $\tilde{\pi}_3$ que p_3 et $\tilde{\pi}_4$ que p_4 ; la teneur de $\tilde{\pi}$ sera alors obtenue par superposition.

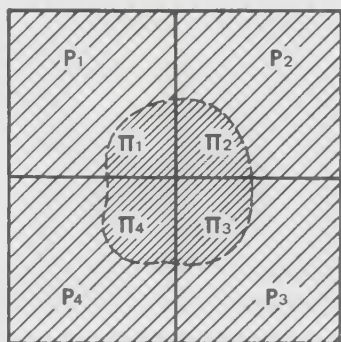


Figure VII-74

Superposition des panneaux P et $\tilde{\pi}$

Toutefois, quand $\tilde{\pi}$ devient assez grand devant p , la méthode précédente bien qu'applicable, risque de devenir inutilement fastidieuse. Elle demande le précalcul du krigeage de chaque panneau p_i , pour en définitive n'en retenir que la moyenne pondérée, ce qui va à l'encontre de la différenciation de chacun des panneaux p_i . Aussi quand le panneau à kriger sera grand devant la maille, ou plus généralement, disposera d'un échantillonnage assez copieux, on le krigerait directement en divisant l'ensemble des reconnaissances en deux groupes, celles qui sont intérieures et celles qui sont extérieures au panneau. On s'aperçoit, dans les applications numériques, que pour des panneaux égaux à 10 p ou plus, les deux méthodes sont strictement équivalentes.

5.3. Domaine de validité du krigeage aléatoire

Dans quel domaine de validité le krigeage aléatoire s'applique-t-il ? Une maille a beau être aléatoire stratifiée dans son ensemble, il n'empêche que localement, dans un rectangle (ℓ , h) bien déterminé, le sondage présent peut occuper une position centrale ou extrêmement périphérique et que la non prise en compte d'une telle information risque fort d'aboutir, pour un même panneau à des résultats différents de ceux du krigeage régulier. Pour répondre à cette objection, notons d'abord que si la maille est véritablement aléatoire stratifiée, les résultats des deux méthodes seront très vite identiques, dès qu'on calculera le krigeage moyen de plusieurs panneaux. Mais la véritable réponse réside surtout dans le comportement localement aléatoire des teneurs, c'est-à-dire dans l'effet de pépité. En effet, reprenons, dans l'étude des mailles moyennes régulières, la configuration complète, c'est-à-dire le rectangle (ℓ , h), pourvu de sondages aux quatre sommets et au centre. Pour $\xi = 0$ le carré $\frac{\ell}{a} = \frac{h}{a} = 0,1$ est krigé par un poids de 42,2 % au sondage central et 14,5 à chacun des périphériques, mais pour $\xi = 0,15$ ces poids deviennent respectivement 24,9 et 18,2. Ainsi pour une aussi faible augmentation de ξ , à partir de la transition pure, la différence d'importance le sondage le mieux disposé (le central) et le sondage le plus mal disposé (sondage d'angle) par rapport au panneau, passe de 27,7 % à 6,7 %, c'est-à-dire est divisée par 4.

On peut donc pratiquer sans crainte le krigeage aléatoire dès que l'effet de pépité vaut le cinquième de la transition totale, ou plus.

Ces deux conditions que nous venons d'énumérer : existence d'un effet de pépite, sommation des pondérateurs sur plusieurs panneaux, dont une seule des deux à la fois, au moins, est impérative, se trouvent d'elles-mêmes remplies dans le calcul des réserves du gisement de fer de Lorraine. Ce calcul s'effectuera le plus souvent à partir de sondages, parfois de saignées simples, dans des couches qui connaissent en majorité des effets de pépite supérieurs à la limite citée à l'instant ; le nombre de rectangles (ℓ , h) dépasse le millier, et les mailles enfin, en très bonne approximation, s'assimilent à des réseaux aléatoires stratifiés.

5.4. Krigeage aléatoire des grands panneaux

Étudions d'abord le cas où le panneau γ est grand par rapport à la maille de sondage, mais petit par rapport au gisement (pour que l'hypothèse de son implantation aléatoire ait un sens).

G est l'ensemble du gisement, ou encore la portion très vaste de celui-ci d'où l'on a extrait le panneau γ . Dans G , la reconnaissance s'est déroulée suivant un schéma rigide, ou aléatoire stratifié. Les coefficients de krigeage que nous allons maintenant établir peuvent, à la rigueur, être étendus au cas des mailles aléatoires pures, à condition qu'elles soient denses, mais en présence de ce genre de réseau de reconnaissance, l'intérêt du krigeage est notablement amoindri. Quel que soit le schéma de reconnaissance, le panneau γ est implanté de façon aléatoire à l'intérieur de G . Les paramètres caractérisant la maille sont ℓ et h , ils représentent les distances intersondages dans le cas régulier rectangulaire, ou l'unité de base d'implantation dans le cas aléatoire stratifié, rectangulaire lui aussi. On appellera $p = \ell \cdot h$ la surface de ce panneau unitaire.

Le nombre des sondages de G est N, celui de $\tilde{\Pi}$ est n. n étant par hypothèse suffisamment grand, les surfaces de G et $\tilde{\Pi}$ sont respectivement Np et np . Formons l'estimateur

$$t = (1 - \lambda) y + \lambda z$$

où y est la teneur moyenne des n reconnaissances intérieures à $\tilde{\Pi}$
 z " " " des N " " " à G
 t est la teneur krigée de $\tilde{\Pi}$

Le système de Matheron s'écrit ici :

$$(VII, 23) \quad \lambda = \frac{A}{B} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A &= \overline{\sigma_{\Pi z}} - \overline{\sigma_{\Pi y}} - \overline{\sigma_{yz}} - \overline{\sigma_y}^2 \\ B &= \overline{\sigma_y}^2 - 2 \overline{\sigma_{yz}} + \overline{\sigma_z}^2 \end{aligned}$$

où des expressions telles que $\overline{\sigma_z}^2$ ou $\overline{\sigma_{\tilde{\Pi}y}}$ représentent des variances ou des covariances prises dans tout le champ G. L'hypothèse d'implantation aléatoire de $\tilde{\Pi}$ entraîne que :

$$(VII, 24) \quad \begin{cases} \overline{\sigma_{\Pi z}} = 0 \\ \overline{\sigma_{\tilde{\Pi}y}} = \overline{\sigma_{\tilde{\Pi}}}^2 \end{cases}$$

De plus, la covariance de y avec z se décompose en deux parties

$$(VII, 25) \quad \overline{\sigma_{yz}} = \frac{n \overline{\sigma_y}^2 + (N - n) \overline{\sigma_y}^2 (G - \tilde{\Pi})}{N}$$

or, la covariance de y avec le gisement entier est nulle, c'est-à-dire que

$$(N - n) \sigma_{y(G-\bar{y})}^2 + n \sigma_{\bar{y}}^2 = 0$$

$$(VII, 26) \quad d'où \quad \sigma_{yz} = \frac{n}{N} (\sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}}^2)$$

D'un autre côté, quel que soit le type de reconnaissance, la formule de Krige entraîne

$$\sigma_z^2 = \frac{n}{N} (\sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}}^2)$$

Les relations (VII, 24) et (VII, 26) entraînent :

$$(VII, 27) \quad \lambda = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}}^2}{\sigma_y^2 + \frac{n}{N-n} \sigma_{\bar{y}}^2}$$

Dans la formule (VII, 27) donnant la valeur de λ , l'expression exacte de σ_y^2 dépend du mode de reconnaissance adopté ; si le réseau rigide est implanté dans son ensemble de façon aléatoire dans le panneau, ou selon le mode aléatoire stratifié, il vient :

$$\sigma_{y/\bar{y}}^2 = \frac{\sigma_o^2 - \sigma_p^2}{n} = \frac{\sigma_o^2 / p}{n}$$

les notations $\sigma_o^2 / \bar{y}$ et σ_o^2 / p signifiant variance d'une reconnaissance dans le panneau , ou dans le panneau p respectivement.

L'expression (VII, 27) de λ prend une forme plus simple quand G est grand et s'écrit :

$$(VII, 28) \quad \lambda = 1 - \frac{\sigma_{\pi}^2}{\sigma_y^2}$$

L'effet de pépité majorant σ_y^2 sans toucher σ_{π}^2 , on voit que ou le poids de l'ensemble du gisement, est d'autant plus important que cet effet est prononcé. La formule (VII, 28) est, du reste, la formule originelle de Krige.

On déduit de (VII, 27) et de la définition (VII, 6) de la variance de krigeage son expression, qui est :

$$(VII, 29) \quad \sigma_K^2 = (\sigma_y^2 - \sigma_{\pi}^2) \cdot \left[1 - \frac{\sigma_y^2 - \sigma_{\pi}^2}{\frac{N}{N-n} \left[\sigma_y^2 + \frac{n}{N-n} \sigma_{\pi}^2 \right]} \right]$$

La formule (VII, 29) permet théoriquement de calculer la taille optimale de la portion de gisement à prendre comme entourage du panneau π . En effet, σ_K^2 passe par un minimum pour la valeur de N qui minimise l'expression :

$$\frac{N}{N-n} \left[\sigma_y^2 + \frac{n}{N-n} \sigma_{\pi}^2 \right]$$

Nous ne calculerons pas ce minimum, tout au moins de façon formelle, car son expression en fonction de N et de ε est, en schéma de Matheron, assez complexe. On attendra plutôt le cas général du krigeage aléatoire à deux auréoles pour déterminer numériquement pour un ε moyen de 0,50 la variation des paramètres, poids λ_i et variance correspondante, en fonction de la taille N du gisement. On verra que N peut être considéré comme infini dès qu'il dépasse la valeur 20.

5.5. Krigeage aléatoire à deux auréoles

L'hypothèse que nous avons émise au paragraphe précédent, en considérant seulement des panneaux grands par rapport à la maille de prélèvements est maintenant levée et nous nous intéressons ici à toutes tailles de panneaux.

Le gisement, de taille G , comprend N reconnaissances. G est découpé en N panneaux p , rectangles de côté ℓ , h , qui possèdent chacun une reconnaissance dans le cas de mailles aléatoires stratifiées, et un nombre variable, de moyenne égale à 1, dans le cas des mailles aléatoires pures. Le carroyage des panneaux p et le découpage des panneaux miniers à estimer sont, en bonne approximation, indépendants d'un de l'autre, on krigera donc les panneaux γ par superposition, comme il a déjà été indiqué plus haut. Par exemple, dans le cas de figure (VII - 74), γ_1 sera krigé par les mêmes coefficients que p_1 ; γ_2 que p_2 , etc... Il suffit par conséquent de déterminer le krigeage aléatoire des éléments p pour connaître celui de n'importe quel panneau γ .

Pour ce faire, on considérera, en plus de l'échantillonnage interne à p , les deux auréoles suivantes :

- 1) le panneau p' , rectangle ayant même centre de gravité que p , mais de côté 3ℓ , $3h$.
- 2) le gisement G .

La terminologie d'auréole, consacrée par l'usage, est ici ambiguë. En réalité p , p' et G ne sont pas découpés comme autant d'auréoles séparées dans le gisement, mais au contraire, p' contient entièrement p , et G contient entièrement p et p' .

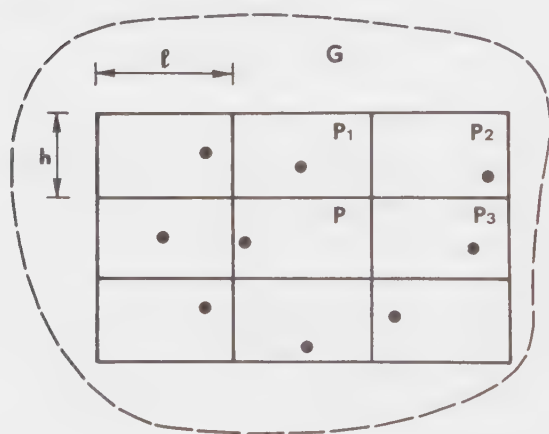


Figure VII-75

Auréoles du krigeage aléatoire

P : panneau central

P' : P et les 8 panneaux adjacents

G : l'ensemble du gisement

p	possède	n	échantillons	de	moyenne	x
p'	"	n'	"	"	"	y
G	"	N	"	"	"	z

Dans le cas des mailles aléatoires stratifiées $n = 1$ et $n' = 9$, on formera l'estimateur t de la teneur de p de la façon suivante :

$$(VII, 31) \quad t = \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu) z$$

où λ et μ sont fournis par la résolution du système de Matheron, qui s'écrit ici :

$$(VII, 32) \quad \begin{cases} \lambda R_x + \mu R_{xy} = N_x \\ \lambda R_{xy} + \mu R_y = N_y \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} R_x = \sigma_x^2 - 2 \sigma_{xz} + \sigma_z^2 \\ R_y = \sigma_y^2 - 2 \sigma_{yz} + \sigma_z^2 \\ R_{xy} = \sigma_{xy} - \sigma_{xz} - \sigma_{yz} + \sigma_z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} N_x = \sigma_{px} - \sigma_{pz} - \sigma_{xz} + \sigma_z^2 \\ N_y = \sigma_{py} - \sigma_{pz} - \sigma_{yz} + \sigma_z^2 \end{cases}$$

Avant de résoudre le système (VII, 32), calculons les covariances qui entrent en jeu.

5.6. Formulaire des variances et covariances du krigage aléatoire

5.6.1. Covariances des panneaux avec les reconnaissances

L'implantation de p et p' étant aléatoires dans G , on a, par définition :

$$(VII, 33) \quad \sigma_{pz} = \sigma_{p'z} = 0$$

La structure aléatoire
p entraîne :

$$(VII, 34) \quad \sigma_{px}^2 = \sigma_p^2$$

et de même :

$$(VII, 35) \quad \sigma_{py}^2 = \sigma_{p \cdot p'}$$

σ_p^2 s'exprime à l'aide de la fonction $F(h, \ell)$ définie au chapitre IV.
Par contre la covariance $\sigma_{p \cdot p'}$ des panneaux p et p' demande à être calculée. Dans ce but, explicitons la variance du panneau $(p_1 + p_2 + p_3 + p)$ celle du panneau $(p_1 + p_2)$ et celle du panneau $(p_2 + p_3)$ de la figure (VII - 75) :

$$(VII, 36) \quad 16 \sigma_{(p_1 + p_2 + p_3 + p)}^2 = 4 \sigma_p^2 + 4 \sigma_{p_1 p_2} + 4 \sigma_{p_2 p_3} + 4 \sigma_{p p_2}$$

$$(VII, 37) \quad 4 \sigma_{(p_1 + p_2)}^2 = 2 \sigma_p^2 + 2 \sigma_{p_1 p_2}$$

$$(VII, 38) \quad 4 \sigma_{(p_2 + p_3)}^2 = 2 \sigma_p^2 + 2 \sigma_{p_2 p_3}$$

(VII, 36) ; (VII, 37) ; (VII, 38) entraînent :

$$(VII, 39) \quad 9 \sigma_{p \cdot p'}^2 = \sigma_p^2 + 16 \sigma_{(p_1 + p_2 + p_3 + p)}^2 - 4 \left[\sigma_{(p_1 + p_2)}^2 + \sigma_{(p_2 + p_3)}^2 \right]$$

ou, en remplaçant les variances par leur expression en fonction de $F(h, \ell)$

$$\text{VII, 40)} \quad \frac{9}{c} \sigma_{p \cdot p'} = 9 - 16 F(2h, 2\ell) + 4 \left[F(2h, \ell) + F(h, 2\ell) \right] - F(h, \ell)$$

5.6.2. Covariance des reconnaissances

La covariance de x avec la teneur moyenne des reconnaissances s'écrit :

$$\sigma_{xz} = \frac{1}{G} \left[p \sigma_x^2 + \frac{(G-p)}{G} \sigma_{x(G-p)} \right]$$

soit en transposant la formule (VII, 26) :

$$\text{(VII, 41)} \quad \sigma_{xz} = \frac{p}{G} (\sigma_x^2 - \sigma_p^2) = \frac{p}{G} \cdot \sigma_{x/p}^2$$

où la notation $\sigma_{x/p}^2$ signifie "variance de x dans p " de même,

$$\text{(VII, 42)} \quad \sigma_{yz} = \frac{p'}{G} \cdot \sigma_{y/p'}^2 = \frac{p}{G} \cdot \sigma_{o/p}^2$$

Enfin,

$$\text{(VII, 43)} \quad \sigma_{xy} = \frac{p \cdot \sigma_x^2 + (p' - p) \sigma_{p(p'-p)}}{p'} = \frac{p}{p'} \cdot \sigma_{x/p}^2 + \sigma_{p \cdot p'}$$

5.6.3. Variances des reconnaissances

a) Mailles aléatoires stratifiées

$$(VII, 44) \quad \sigma_x^2 = C + C_o = \sigma_o^2$$

Si la maille, bien qu'aléatoire stratifiée, en moyenne, comprend parfois n échantillons dans le panneau p , σ_x^2 prend alors la valeur :

$$(VII, 45) \quad \sigma_x^2 = \frac{\sigma_o^2 / p}{n} + \sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sigma_o^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma_p^2$$

Les autres variances se calculent de façon identique :

$$(VII, 46) \quad \sigma_y^2 = \frac{p}{p'} \sigma_{o/p}^2 + \sigma_{p'}^2$$

et

$$(VII, 47) \quad \sigma_z^2 = \frac{p}{G} \cdot \sigma_{o/p}^2$$

b) Mailles purement aléatoires

$$(VII, 48) \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sigma_o^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma_p^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n'} \sigma_o^2 + \left(1 - \frac{1}{n'}\right) \sigma_{p'}^2$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N} \sigma_o^2$$

où σ_o^2 indique, comme précédemment, la variance d'une reconnaissance dans le gisement.

5.7. Formules et abaqes du krigeage aléatoire à 2 auréoles

A l'aide du formulaire ci-dessus nous allons, dans ce paragraphe résoudre formellement, puis numériquement pour le schéma de Matheron, le calcul des coefficients de krigeage. On distinguera quatre cas : les deux extrêmes, mailles aléatoires pures et stratifiées, et entre ces pôles les deux éventualités intermédiaires correspondant soit à n sondages ($n > 1$) dans le panneau p, soit à 0 sondage dans p (la maille restant stratifiée par ailleurs).

5.7.1. Maille aléatoire stratifiée

L'estimateur du panneau p :

$$t = \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu) z$$

où x est la teneur moyenne de l'échantillonnage de p de taille n, y celle de p', et z celle du gisement, a pour coefficients :

$$(VII, 49) \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{N_x R_y - N_y R_{xy}}{R_x R_y - (R_{xy})^2} \\ \mu = \frac{N_y R_x - N_x R_{xy}}{R_x R_y - (R_{xy})^2} \end{array} \right.$$

$$(VII, 50) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_x = \frac{1}{n} \left[1 + \frac{p}{G} (n-2) \right] \left[\sigma_o^2 - \sigma_p^2 \right] + \sigma_p^2 \\ R_y = \left(\frac{p}{p'} - \frac{p}{G} \right) (\sigma_o^2 - \sigma_p^2) + \sigma_{p'}^2 \\ R_{xy} = \left(\frac{p}{p'} - \frac{p}{G} \right) (\sigma_o^2 - \sigma_p^2) \frac{1}{n} + \sigma_p / p' \\ N_x = \sigma_p^2 + \frac{p}{G} (\sigma_o^2 - \sigma_p^2) \frac{n-1}{n} \\ N_y = \sigma_p / p' \end{array} \right.$$

Ces formules, rigoureuses pour $n = 1$ restent encore très exactes pour $n = 2$; au delà, on a affaire à un krigeage aléatoire pur.

5. 8. Influence de l'effet de pépite et de la taille du gisement

Utilisons le système (VII, 49) (VII, 50) pour établir l'influence de l'effet de pépite ε , puis de la taille N du gisement sur les paramètres du krigeage aléatoire. Si l'on explicite (VII, 50) à l'aide des fonctions classiques $F\left(\frac{h}{a}, -\frac{\ell}{a}\right)$, il prend la forme (VII, 51).

(VII, 51)

$$\begin{aligned}
 R_x &= \frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{N} (n - 2) \right] \left[\varepsilon + F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) \right] - F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) + 1 \\
 R_y &= \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{N} \right) \left[\varepsilon + F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) \right] - F \left(\frac{3\ell}{a}, \frac{3h}{a} \right) + 1 \\
 R_{xy} &= \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{N} \right) \left[\varepsilon + F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) \right] \cdot \frac{1}{n} + 1 \\
 &\quad - \frac{1}{9} \left[F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) + 16 F \left(\frac{2\ell}{a}, \frac{2h}{a} \right) - 4 F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{2h}{a} \right) - 4 F \left(\frac{2\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) \right] \\
 N_x &= - F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) + \frac{1}{N} \left[\varepsilon + F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) \right] \cdot \frac{n-1}{n} + 1 \\
 N_y &= - \frac{1}{9} \left[F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) + 16 F \left(\frac{2\ell}{a}, \frac{2h}{a} \right) - 4 F \left(\frac{\ell}{a}, \frac{2h}{a} \right) - 4 F \left(\frac{2\ell}{a}, \frac{h}{a} \right) \right] + 1
 \end{aligned}$$

On voit que quand ε et N deviennent très grands λ et μ tendent tous deux vers 0 ; le krigeage est détruit et remplacé par la moyenne indifférenciée du gisement. En vue de pousser l'étude numérique plus loin fixons les paramètres ainsi :

$$N = \infty, \quad \frac{\ell}{a} = \frac{h}{a} = 1, \text{ schéma de Matheron.}$$

λ , μ et $\frac{1}{C} \sigma_k^2$ varient alors suivant les graphes de la figure VII-76. Jusqu'à $\varepsilon = 0,1$, μ reste constant, σ_k^2 varie peu et λ ne varie que du dixième de sa valeur. Cette permanence des valeurs est due à l'hypothèse d'implantation aléatoire stratifiée, qui équivaut à un effet de pépité préalable, en comparaison duquel le second, le vrai, ne joue aucun rôle tant qu'il est petit. Les courbes décroissent ensuite de façon régulière.

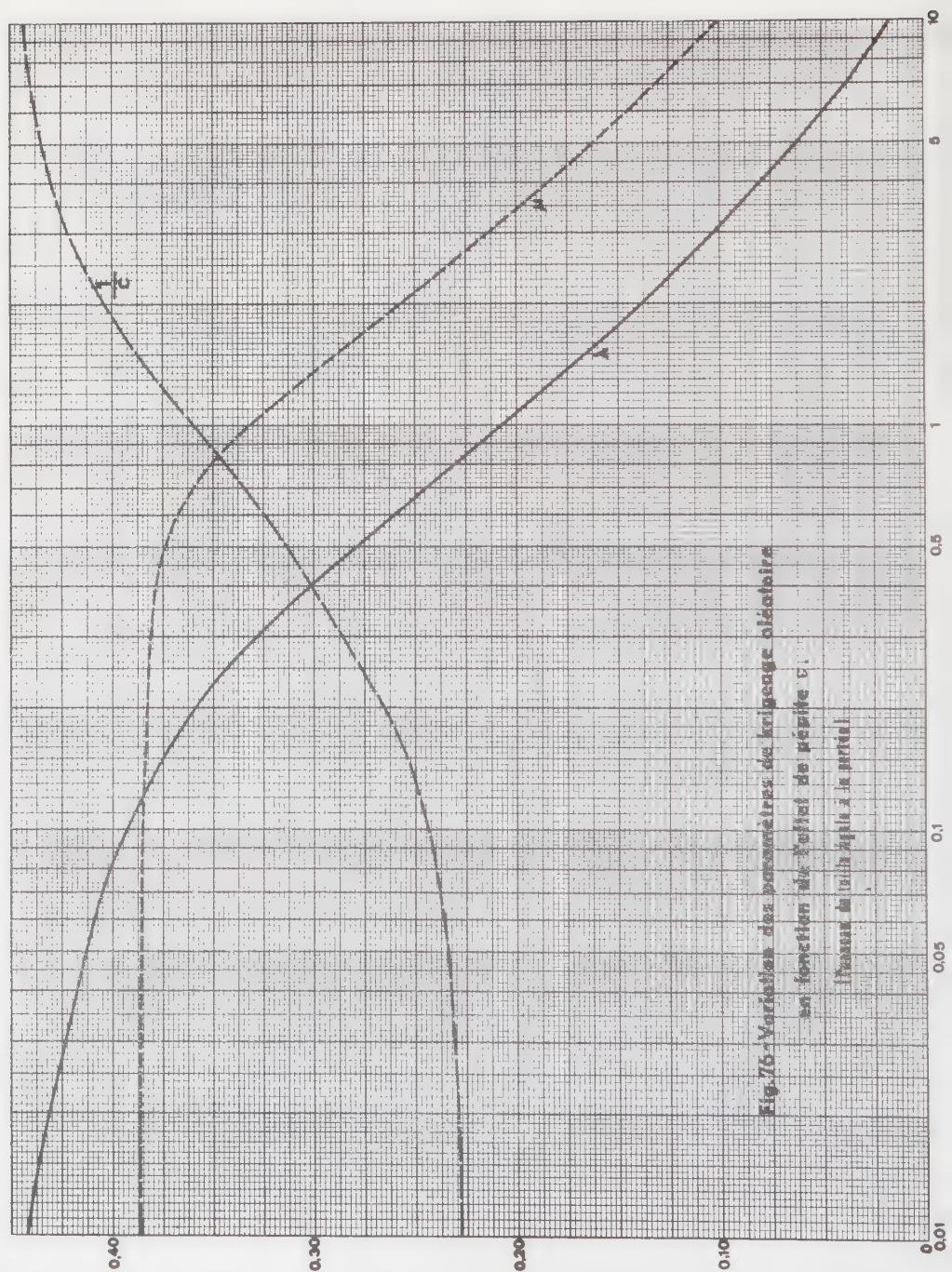


Fig. 76. Variation des paramètres de krigeage oléatoire

en fonction du degré de polymère P_n .

(Fournier de la Roche et al.)

Au delà de $\xi = 1$ l'amélioration de variance due au krigeage (différence entre le palier de σ_k^2 et sa valeur) est déjà réduite de plus de moitié. Enfin, pour $\xi = 10$, λ et μ , petits vis à vis du poids complémentaire accordé au gisement entier, ne valent plus la peine qu'on cherche à les déterminer par krigeage.

On utilisera les enseignements de l'abaque de la figure (VII - 76) pour choisir les valeurs de ξ des abaques de krigeage aléatoire, que l'on prendra égales à 0 ; 0,25 ; 0,50 et 1. Les λ et μ correspondant aux autres valeurs de ξ seront obtenus par interpolation si $\xi < 1$ ou par extrapolation en admettant que pour $\xi = 20$, $\lambda = \mu = 0$.

Par un procédé de calcul analogue, on peut aussi étudier l'influence de la taille N du gisement sur λ , μ et σ_k^2 . On fixera, dans (VII, 51) $\frac{h}{a} = \frac{b}{a} = 1$ et $\xi = 0,5$ (qui représente une valeur moyenne des ξ justifiant le krigeage aléatoire). Lorsqu'on fait varier dans ces conditions le nombre total des panneaux de 10 à 1000 on constate que λ , poids du sondage du panneau central p est indépendant de N (à 1 % près) et que pour $N > 50$, avec la même précision μ devient aussi une constante. Comme ce calcul numérique a été effectué dans des conditions particulières ($\frac{h}{a} = \frac{b}{a} = 1$ et $\xi = 0,5$) on tâchera dans la mesure du possible de prendre N égal à 100 (ce qui ne fait jamais qu'un gisement de 10 . 10 fois le panneau p de base).

5.9. Krigeage de la configuration aléatoire stratifiée sans lacunes

Supposons d'abord la maille parfaite, c'est-à-dire que le panneau p ne comprend qu'un seul sondage, et qu'il n'y a aucune lacune dans p' - p

(si certains des sous panneaux de $p' - p$ possèdent plusieurs échantillons, on les remplacera par leur moyenne, de façon à associer à chaque élément d'aire ℓ une valeur numérique de sondage et une seule). Dans ces conditions (VII, 45) et (VII, 46) entraînent :

$$(VII, 52) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{\frac{1}{9} (\sigma_o^2 - \sigma_p^2) (\sigma_p^2 - \sigma_{p/p'}^2) + \sigma_p^2 \cdot \sigma_{p'}^2 - (\sigma_{p/p'}^2)^2}{\frac{(\sigma_o^2 - \sigma_p^2)}{9} (\frac{8}{9} \sigma_o^2 + \frac{1}{9} \sigma_p^2 - 2 \sigma_{p/p'}^2) + \sigma_o^2 \cdot \sigma_{p'}^2 - (\sigma_{p/p'}^2)^2} \\ \mu &= \frac{(\sigma_o^2 - \sigma_p^2) (\sigma_{p/p'} - \frac{1}{9} \sigma_p^2)}{\frac{(\sigma_o^2 - \sigma_p^2)}{9} (\frac{8}{9} \sigma_o^2 + \frac{1}{9} \sigma_p^2 - 2 \sigma_{p/p'}^2) + \sigma_o^2 \cdot \sigma_{p'}^2 - (\sigma_{p/p'}^2)^2} \end{aligned} \right.$$

Les valeurs numériques correspondantes, calculées en schéma de Matheron pour des panneaux carrés, sont présentées sur l'abaque (VII, 79) (le système VII, 52 est évidemment valable pour n'importe quel schéma).

L'abaque (VII, 80) reprend un cas de figure identique en ce qui concerne la couronne, toujours supposée complète, mais différent relativement au panneau p où le nombre n des sondages présents est égal à 2 (si $n = 3$ on peut encore utiliser cet abaque, au delà il est difficile de parler de maille aléatoire stratifiée, et l'on doit adopter les expressions du krigeage purement aléatoire).

5. 10. Krigeage de la configuration aléatoire stratifiée avec une lacune centrale

Le cas où le panneau p ne possède aucun sondage demande une étude spéciale (on suppose toujours la couronne $p' - p$ complète).

On appellera cette fois-ci y la teneur moyenne des reconnaissances de $p' - p$ et z la teneur moyenne des reconnaissances du gisement entier.

On forme pour P l'estimateur

$$t = \mu y + (1 - \mu) z$$

avec $\mu = \frac{\sigma_{py} - \sigma_{pz} - \sigma_{yz} + \sigma_z^2}{\sigma_z^2 - 2\sigma_{yz} + \sigma_y^2}$

soit compte tenu de (VII, 33) à (VII, 44) :

$$(VII, 53) \quad \mu = \frac{\sigma_p(p' - p)}{(\sigma_o^2 - \sigma_p^2) \left(\frac{p}{p' - p} - \frac{p}{G} \right) + \sigma_{(p' - p)}^2}$$

la covariance $\sigma_p(p' - p)$ s'écrit :

$$(VII, 54) \quad \sigma_p(p' - p) = 2 \sigma_{(2\ell, 2h)}^2 - \frac{1}{2} \left[\sigma_{(\ell, 2h)}^2 + \sigma_{(2\ell, h)}^2 \right]$$

où la notation $\sigma_{(2\ell, h)}^2$ signifie "variance du rectangle $2\ell, h$ dans

le gisement. De même la variance $\sigma_{(p' - p)}^2$ s'écrit :

$$(VII, 55) \quad \sigma_{(p' - p)}^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left[81 \sigma_{p'}^2 - \sigma_p^2 - 32 \sigma_{(2\ell, 2h)}^2 + 8 \sigma_{(\ell, 2h)}^2 + 8 \sigma_{(2\ell, h)}^2 \right]$$

Compte tenu de (VII, 54) et (VII, 55), (VII, 56) s'écrit :

$$(VII, 56) \quad \mu = \frac{2 \sigma_{(2\ell, 2h)}^2 - \frac{1}{2} \left[\sigma_{(2h, \ell)}^2 + \sigma_{(2\ell, h)}^2 \right]}{\left(\sigma_o^2 - \sigma_p^2 \right) \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1}{64} \left[81 \sigma_{p'}^2 - \sigma_p^2 - 32 \sigma_{(2\ell, 2h)}^2 + 8 \sigma_{(\ell, 2h)}^2 + 8 \sigma_{(2\ell, h)}^2 \right]}$$

(VII, 56) est générale à toutes les fonctions intrinsèques. Elle relie le coefficient de krigeage μ à la variance des rectangles (ℓ, h) , $(\ell, 2h)$, $(2\ell, h)$, $(2\ell, 2h)$ et $(3\ell, 3h)$, ainsi qu'à l'effet de pépité par l'intermédiaire de σ_o^2 et la taille de la portion de gisement étudiée, par l'intermédiaire de N .

En schéma de Matheron, pour les panneaux carrés et les valeurs de ℓ et N choisies plus haut, il vient les valeurs numériques de l'abaque (VII, 78).

5. 11. Configuration possédant deux lacunes

Lorsque la couronne $p' - p$ possède des lacunes, l'expression des covariances change et dépend de leur nombre et de leur implantation. Au delà des trois lacunes sur les 8 sondages de $p' - p$ on considérera que la maille est purement aléatoire.

On se contentera d'étudier le cas de deux lacunes adjacentes (les résultats restent numériquement équivalents si les deux lacunes sont disposées autrement). S'il n'y a qu'une seule lacune, on interpolera avec le résultat précédent, s'il y en a trois, on adoptera le cas de figure de deux lacunes.

A nouveau, construisons trois abaques selon que p possède un, deux ou zéro sondages ($n = 1, 2$ ou 0).

Si n est différent de zéro, il suffit de reprendre le système (VII, 51) avec, à la place de R_y , l'expression :

$$R'_y = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{N} \right) \left[\varepsilon + F(\ell, h) \right] - F \left[2,64 \ell; 2,64 h \right] + 1$$

à la place de R_{xy} l'expression :

$$R'_{xy} = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{N} \right) \left[\varepsilon + F(\ell, h) \right] \cdot \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{7} \left[16 F(2\ell, 2h) - 6 \left[F(\ell, 2h) + F(2\ell, h) \right] + 3 F(\ell, h) \right]$$

à la place de N_y l'expression :

$$N'_y = 1 - \frac{1}{7} \left[3 F(\ell, h) + 16 F(2\ell, 2h) - 6 \left[F(\ell, 2h) + f(2\ell, h) \right] \right]$$

Les deux abaques correspondants ($n = 1, n = 2$) sont les figures n° (VII, 83) et (VII, 84).

Enfin, si $n = 0$ on remplace l'expression (VII, 48) de μ par :

$$\mu = \frac{1 - \frac{1}{3} \left[8 F(2\ell, 2h) - 3 \left[F(2\ell, h) + F(\ell, 2h) \right] + F(\ell, h) \right]}{1 + \left[\varepsilon + F(\ell, h) \right] \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{N} \right] - F(2,35\ell; 2,35h)}$$

Les résultats numériques correspondants sont tabulés sur l'abaque (VII, 82).

Tous ces abaques se trouvent en troisième partie.

Variances de krigeage aléatoire

Les variances de krigeage aléatoire sont exprimées par la formule (VII, 6) qui appliquée au cas présent s'écrit :

$$(VII, 57) \quad \frac{1}{C + C_0} \cdot \sigma_k^2 = 1 - F\left(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a}\right) - \lambda N_x - \mu N_y$$

où λ et μ sont données par le système (VII, 52) et N_x et N_y par le système (VII, 51). On ne retrouve plus la simplicité formelle des variances de krigeage régulier, aussi tabulerons nous les variances sous forme des 2 abaques des figures (VII, 81) et (VII, 85).

5. 12. Krigeage suivant des mailles purement aléatoires

Nous donnons les résultats qui suivent plutôt par souci de cohérence que d'efficacité. Autant en présence de mailles aléatoires stratifiées, la structure floue, mais réelle, du réseau des reconnaissances permettait

d'asseoir le krigeage sur des relations de voisinage entre panneaux qui avaient un sens physique certain, autant si, par définition, les sondages sont n'importe où, il est vain d'utiliser l'implantation particulière de chacun d'eux pour améliorer l'estimation locale des panneaux. Il y a un désaccord interne entre les deux notions, et le carroyage des panneaux p dès que le nombre d'échantillons internes à chaque p n'est plus une constante, mais une variable poissonnienne de moyenne 1 n'a plus de sens physique véritable. Le seul cas où le krigeage purement aléatoire reprend de l'intérêt est celui où, par rapport aux panneaux $\mathcal{T}$ à estimer (et non pas au carroyage), le nombre des reconnaissances est important. On se trouve alors ramené au cas des grands panneaux, krigés plus haut à l'aide d'une seule auréole.

Rappelons donc rapidement, et à titre purement indicatif, ce que deviennent les coefficients λ et μ de l'estimateur du panneau p (ℓ, h) quand la maille est aléatoire pure.

Le nombre des sondages internes à p est positif ($n \geq 1$).

Le système (VII, 49) reste inchangé, par contre, le système (VII, 50) s'écrit, compte tenu de (VII, 39) à (VII, 48) :

(VII, 58)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_y = \left(\frac{\sigma_o^2 - \sigma_{p'}^2}{n'} \right) \left(1 - \frac{18}{N} \right) + \sigma_{p'}^2 + \frac{\sigma_o^2}{N} \\ R_{xy} = \left(\frac{\sigma_o^2 - \sigma_p^2}{n} \right) \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{N} \right) - \left(\frac{\sigma_o^2 - \sigma_{p'}^2}{n'} \right) \frac{9}{N} + \sigma_{p/p'} + \frac{\sigma_o^2}{N} \\ N_x = \sigma_p^2 + \frac{\sigma_o^2}{N} - \left(\frac{\sigma_o^2 - \sigma_p^2}{n} \right) \frac{1}{N} \\ N_y = \sigma_{p/p'} + \frac{\sigma_o^2}{N} - \left(\frac{\sigma_o^2 - \sigma_{p'}^2}{n'} \right) \frac{9}{N} \end{array} \right.$$

Ce système est l'équivalent du système (VII, 50) des mailles aléatoires stratifiées. Rappelons que l'on a découpé le gisement de taille G et qui comportait N reconnaissances en G/N rectangles de taille p, que le krigeage de deux de ces p rectangles qui possèdent au moins une reconnaissance interne s'écrit :

$$t = \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu) z$$

où x est la teneur moyenne des reconnaissances de p

y	"	"	"	"	de p' (rectangle de même
					centre que p et de côtés
z	"	"	"	"	de G 3 ℓ, 3 h)

Les coefficients λ et μ sont donnés par les expressions (VII, 49) qui dépendent elles-mêmes des cinq paramètres R_x , R_y , R_{xy} , N_x et N_y , donnés littéralement par (VII, 58). Ce résultat est général pour toutes les fonctions $\chi(h)$.

Il n'y a pas de sondages dans p $n = 0$

Soit y la teneur moyenne des n' sondages de p'
 z " " de l'ensemble du gisement.

On forme l'estimateur $t = \mu y + (1 - \mu) z$

Il vient cette fois-ci, compte tenu des expressions (VII, 33) à (VII, 48) :

$$\text{VII, 59) } \mu = \frac{\frac{\sigma_o^2}{N} + \sigma_{p/p'}^2 - \left(\frac{\sigma_o^2 - \sigma_{p'}^2}{n'} \right) \cdot \frac{1}{N}}{\frac{\sigma_o^2}{N} + \sigma_{p'}^2 + \left(\frac{\sigma_o^2 - \sigma_{p'}^2}{n'} \right) \left(1 - \frac{9}{N} \right)}$$

CHAPITRES ANNEXES.

Bien que ne correspondant pas à un travail de recherche personnel de notre part, ces trois chapitres et leurs études pratiques ont néanmoins été rajoutés à ce texte de thèse.

Ils traitent trois types de problèmes que les exploitants miniers de Lorraine nous ont posé à plusieurs reprises. Or, ces problèmes ont été abordés et résolus par G. MATHERON, puis Ph. FORMERY et nous considérons qu'il n'y a rien à rajouter sur le plan théorique. Cependant, il nous a semblé commode que les utilisateurs de la géostatistique trouvent ici un rappel de ces études d'usage courant. Nous les avons donc résumées sous forme des trois chapitres annexes qui suivent.

ANNEXE

CHAPITRE VIII

LE PROBLEME GEOMETRIQUE

SOMMAIRE

La solution du problème géométrique est une des tentatives les plus aventureuses, mais aussi les plus utiles de la géostatistique. Il s'agit de trouver un ordre de grandeur pour l'erreur du tracé souvent arbitraire de la frontière minéralisée que l'on doit interpoler entre les sondages positifs et les sondages négatifs d'une campagne de reconnaissance.

Après avoir montré au paragraphe 1 en quoi ce problème s'oppose profondément au formalisme de la théorie intrinsèque, on présente très sommairement les représentations transitives (paragraphe 2) et les propriétés à l'origine du covariogramme géométrique $K(h)$ associé à une variable régionalisée géométrique, comme la surface d'un gisement).

Le paragraphe 3 traite de l'estimation des surfaces reconnues par des mailles petites vis à vis de la portée de la transition. Les formules sont dans ce cas très simples et exposées sous forme de deux abaques qui permettent de résoudre les cas de figure correspondant aux divers types de mailles usuels.

Le paragraphe 4 reprend deux cas particuliers importants de petites mailles, celui où les directions principales d'anisotropie coïncident avec celles de la maille et celui du gisement reconnu par des traversées parallèles.

On passe ensuite (paragraphe 5) aux mailles très grandes, dont l'étude équivaut au problème de statistique classique de Bernoulli. Le cas délicat, celui des mailles intermédiaires, est posé, mais non résolu, dans le paragraphe 6.

Le paragraphe 7 reprend l'étude des mailles petites, mais variables d'un endroit à l'autre du gisement ; une formule empirique est proposée pour résoudre les estimations correspondantes.

Il est clair que si les teneurs, les accumulations ou les puissances ont pu être considérées comme intrinsèques, par contre, la surface minéralisée s'oppose complètement, de par sa nature, à une formulation intrinsèque. En effet, décrivons cette surface comme une fonction à deux dimensions qui prend la valeur $X \approx 1$ pour les points situés à l'aplomb du gisement, et $X = 0$ pour ceux à l'intérieur, on pourra toujours trouver un champ suffisamment petit pour ne comporter que des points $X = 1$ et posséder par conséquent un variogramme nul, puis un champ plus vaste qui chevauche les frontières, à l'intérieur duquel le variogramme prendra donc des valeurs positives, et enfin un champ immense par rapport au gisement où cette fois tout le variogramme tendra vers zéro (fig. VIII - 1).

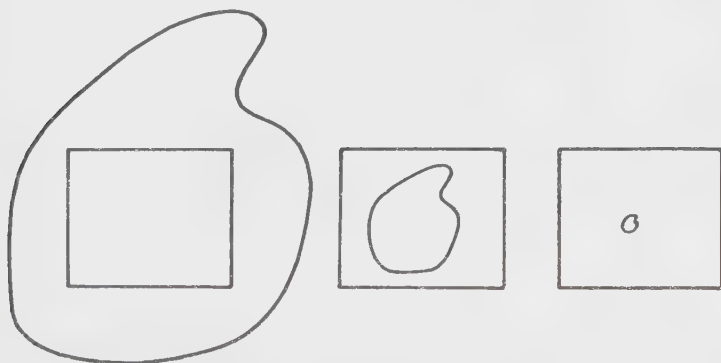


Figure VIII-1: Représentations transitives et échelles.

Cette impossibilité d'utilisation du variogramme relève d'une cause irrémédiable qui est l'unicité du gisement. Si l'on a pu, par l'hypothèse intrinsèque introduire le calcul des probabilités dans toutes les régionalisations étudiées jusqu'ici, c'est parce que la permanence du variogramme à travers d'assez grandes portions du gisement reflétait la permanence d'une

même structure. Reprenons à l'exemple de l'échantillonnage. Sur chaque parement de quelques mètres carrés, les concrétionnements épousent une forme bien particulière et unique. Pourtant, lorsqu'on observe plusieurs parements situés dans la même région (voir les photographies du chapitre III), la série des configurations a un caractère commun, un air de famille, plus précisément elles ont le même variogramme. Une même loi, ici la migration de la calcite, a entraîné en chaque endroit une structure qui dépend évidemment des conditions originelles du dépôt, mais qui l'a modelé dans un style identique partout. De là, vient que les fonctions aléatoires, et plus particulièrement la variance des accroissements ou variogramme, ont pu servir de modèle. Le phénomène s'est localement reproduit de telle sorte que l'inférence statistique soit possible - mais à ce niveau local seulement -. A travers tout l'éventail des échelles qui, par discontinuité, nous élèvent de régionalisation en régionalisation, qui nous conduisent de l'oolithe à la lamina, puis à l'unité de stratification entrecroisée, puis à la couche, on trouve la justification de cette inférence statistique. Par rapport à toute régionalisation, celles qui lui sont inférieures paraissent obligatoirement intrinsèques.

Inversement, si l'on pouvait isoler un microbassin de sédimentation, une de ces lentilles de quelques dizaines d'hectares, elle serait unique par construction et donc indescriptible par le formalisme des fonctions aléatoires. C'est pour cela que dans la succession des échelles, le recours aux représentations transitives devient indispensable dès lors que l'on est confronté à l'ultime régionalisation du phénomène de transition.

2. LES REPRESENTATIONS TRANSITIVES

Une régionalisation quelconque $f(x)$ admet pour covariogramme transitif :

$$\text{VIII, 1)} \quad g(h) = \int f(x) f(x+h) dx$$

où l'intégrale est une intégrale multiple d'ordre n , étendue à tout l'espace et dx représente l'élément de volume $dx_1, dx_2 \dots dx_n$. La régionalisation $f(x)$ est supposée sommable, et à champ borné V . Son champ lui-même défini par la variable géométrique $k(x)$ est susceptible d'une représentation analogue

$$\text{VIII, 2)} \quad K(h) = \int k(x) \cdot k(x+h) dx$$

L'expression $k(x) \cdot k(x+h)$ est égale à l'unité dans le domaine défini comme l'intersection du champ V par son translaté de $-h$ et 0 partout ailleurs. Ainsi, le covariogramme $K(h)$ représente la mesure (le volume si $n = 3$, la surface si $n = 2$, la longueur si $n = 1$) de l'intersection du champ V par son translaté de $-h$, ou par symétrie, de $+h$.

Nous ne présenterons pas la théorie de l'estimation en transitif. Situons simplement le cadre dans lequel elle se définit. Par hypothèse, on ne peut pas extrapoler les paramètres, comme dans le cadre de la théorie intrinsèque qui admet la permanence du variogramme à travers le champ.

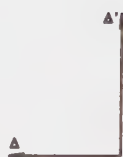
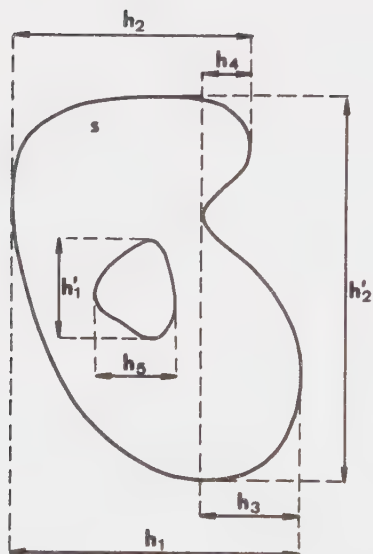
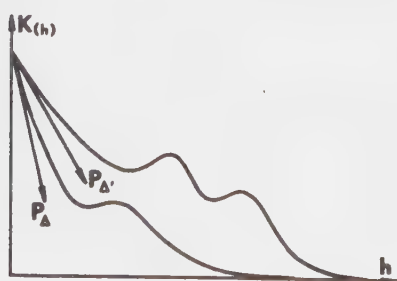


Figure VIII-2

Interprétation physique des tangentes
à l'origine du covarigamme
géométrique $K(h)$.



Le réseau de reconnaissances, aléatoire stratifié, ou régulier, doit donc déborder (ex. fig. VIII - 6) les frontières de la régionalisation, et les entourer d'une ceinture de sondages négatifs, pour lesquels $f(x) = 0$. On a donc affaire par construction, à des mailles à implantation flottante ; et les variances d'estimation correspondantes décrivent les fluctuations de la somme des valeurs expérimentales de $f(x)$ quand le premier sondage est implanté de façon aléatoire dans le polygone de maille, et que les autres sont disposés régulièrement à partir de lui (réseau régulier) ou quand chaque sondage est implanté au hasard dans son polygone de maille (réseau aléatoire stratifié).

Les formules et les deux abaques que nous fournissons ci-dessous ne sont pas spécifiques aux variables géométriques, représentées par leur $K(h)$, mais restent applicables pour n'importe quel $g(h)$. Elles supposent simplement que la maille est, ou petite, ou grande, par rapport à la portée de la représentation transitive.

Par contre, l'interprétation physique de la tangente à l'origine du covariogramme, qu'on utilisera pour généraliser les formules au paragraphe 7, est particulière aux régionalisations géométriques et mérite que l'on s'y arrête un instant.

(VIII, 2) entraîne

$$\text{III, 3)} \quad K(0) = V$$

$$\text{III, 4)} \quad \text{et} \quad \int K(h) dh = V^2$$

On connaît donc, du moins on est capable d'estimer la valeur à l'origine et l'intégrale de $K(h)$. Mais il y a plus. Prenons en effet pour h un vecteur δh de module infiniment petit. La mesure $K(\delta h)$ de l'intersection de V et de son translaté dans la translation infiniment petite δh diffère de $K(h)$ d'une quantité infinitésimale

$$(VIII, 5) \quad K(0) - K(h) = P(\Delta) \cdot \delta(h)$$

proportionnelle à δh au second ordre près, qui représente la moitié du volume balayé par le vecteur δh lorsqu'il parcourt tous les points de la surface limite de V . Ce coefficient de proportionnalité $P(\Delta)$ s'appelle la demi-variation diamétrale direction Δ . Si l'on considère les sections $S(z)$ des intersections de V par des plans perpendiculaires à la direction Δ et repérés par l'abscisse z de leur intersection avec une droite parallèle à Δ , la variation diamétrale $2 P(\Delta)$ apparaît comme la limite supérieure de toutes les sommes possibles de la forme

$$(VIII, 6) \quad |S(z_1) - S(z_2)| + |S(z_2) - S(z_3)| + \dots + |S(z_n) - S(z_{n-1})|$$

Il n'est pas nécessaire que V soit un volume d'un seul tenant et les surfaces limites peuvent présenter des arêtes, des points anguleux, ou encore V peut posséder des trous. Dans les cas particuliers où V est convexe, la demi-variation diamétrale $P(\Delta)$ représente l'aire du contour apparent dans la direction Δ .

Dans le cas général, donnons une illustration de la définition de $P(\Delta)$ dans deux directions Δ et Δ' de la régionalisation géométrique, dotée d'un trou, de la figure (VIII - 2)* Il vient ici $\left\{ P(\Delta) \text{ est la tangente du } K(h) \text{ à l'origine dans la direction } \Delta \right\}$:

$$2 P(\Delta) = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5$$

$$2 P(\Delta') = h_1' + h_2'$$

A la limite, nous aurions pu associer une variation diamétrale à une courbe non fermée. C'est cette particularité qu'on exploitera pour formuler quelques approximations au paragraphe 7. Notons aussi que les tangentes à l'origine du $K(h)$ sont très facilement estimables à partir de la cartographie, même imprécise, de la régionalisation. Or $K(h)$ n'intervient dans les formules des petites mailles que par les valeurs $K'_\Delta(0)$, ce qui rend le calcul de variances d'estimations géométriques bien commode dans ce cas.

3. ESTIMATION TRANSITIVE DES SURFACES PAR RECONNAISSANCE A MAILLES PETITES

Le problème de l'estimation d'une surface minéralisée, dans toute sa généralité, est extrêmement lourd à manier quant aux calculs qu'il demande, car l'existence d'anisotropies complexes rend souvent sa formulation exacte impossible. Par contre, l'étude des mailles petites par rapport au gisement ne fait intervenir que le début, pratiquement linéaire, du $K(h)$ de même, l'étude des grandes mailles est elle aussi très facile car, la covariance entre reconnaissances étant nulle, on peut appliquer à celles-ci

les lois du calcul statistique ordinaire. En ce qui concerne toutes les couches minéralisées du gisement lorrain, on se trouvera toujours dans le cas de mailles petites par rapport au gisement, quoique le plus souvent anisotrope. Mais vu l'échelle de ces mailles, seule l'anisotropie du début du covariogramme servira en pratique et sera assimilée à une anisotropie géométrique, c'est-à-dire déduite de l'isotropie par affinité.

Nous reprenons ici, sans démonstration, le résultat dû à G. MATHERON, du calcul de la variance d'estimation d'une surface à partir du $K(h)$, ou tout au moins du développement limité de cette variance valable pour les petites mailles régulières. Cette formule a été étendue au cas des petites mailles aléatoires stratifiées dans le cours de géostatistique de Ph. FORMERY. La formule de MATHERON s'écrit comme suit :

$$(VIII, 7) \quad \frac{\sigma_s^2}{S^2} = \frac{k_1}{n^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{D_1 D_2}{S}} \quad \text{ou}$$

$$(VIII, 7 \text{ bis}) \quad \sigma_s^2 = k_1 \cdot A^{3/2} \cdot \sqrt{D_1 D_2}$$

Les deux formes (VIII, 7) et (VIII, 7 bis) sont équivalentes. S est la surface à estimer, n le nombre de sondages positifs, A la surface de la maille, aléatoire stratifiée ou régulière, et $D_1 D_2$ représentent les variations diamétrales extrémales de S .

Le nombre k_1 est lié, lui, à l'anisotropie de la maille par rapport au champ S . Pour le déterminer, on procédera de la façon suivante. Soient Δ_1 et Δ_2 les directions dont les variations diamétrales D_1 et D_2 sont

l'une minimale, l'autre maximale. On ramènera la figure formée par le champ et sa reconnaissance à être isotrope relativement à S en étirant les fibres du plan parallèles Δ_2 dans le rapport D_2/D_1 et on ne touchera pas aux fibres parallèles à Δ_1 (affinité d'axe Δ_1 et de module D_2/D_1). Le réseau initialement rectangulaire (ou légèrement oblique) devient en général oblique (figure VIII - 3).

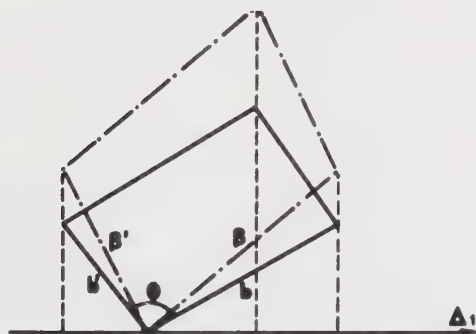


Figure VIII-3

Correction par affinité de la
maille de reconnaissance.

Dans la figure (VIII - 3), b et b' représentent les côtés du rectangle de base avant transformation. L'aire A est donc égale au produit bb' . Si le réseau est régulier, les sondages sont implantés aux sommets de ce rectangle de base, si le réseau est aléatoire stratifié, chaque rectangle possède implanté au hasard à l'intérieur de ses frontières, un sondage. Après affinité d'axe parallèle à Δ_1 , la figure de base est transformée en le parallélogramme de côtés β et β' ($\beta' \leq \beta$) et d'angle aigu θ .

C'est en fonction des caractéristiques de ce parallélogramme transformé que s'exprime le coefficient k_1 de la formule de MATHERON-FORMERY. On a :

1) Mailles régulières :

$$(VIII, 8) \quad k_1 = \frac{1}{6} \left[\frac{\beta'}{\beta \sin \theta} \right]^{1/2} + 0,0609 \left[\frac{\beta'}{\beta \sin \theta} \right]^{-3/2}$$

2) Mailles aléatoires stratifiées :

$$(VIII, 9) \quad k_1 = \frac{\bar{r} (\beta, \beta')}{\sqrt{\beta \beta' \sin \theta}}$$

$\bar{r} (\beta, \beta')$ est la valeur moyenne d'un segment dont les deux extrémités décrivent le parallélogramme (β, β', θ) .

Pour exprimer de façon simple la formule de MATHERON-FORMERY, on a tabulé son expression (VIII, 7 bis) :

$$\sigma_s^2 = k_1 \cdot A^{3/2} \cdot \sqrt{D_1 D_2}$$

Le groupement $A^{3/2} \sqrt{D_1 D_2}$ est appelé k_2 dans l'abaque double "Variance d'estimation de la surface s'' ". La partie gauche de l'abaque donne k_1 en fonction de β'/β et de θ ; la partie droite donne k_2 en fonction de D_1, D_2 et de la surface A de la maille, mesurée avant sa transformation par affinité. σ_s^2 est exprimé dans les mêmes unités que A et $D_1 D_2$.

On trouvera ces deux abaques (fig. VIII - 4 et VIII- 5 dans la troisième partie - Etudes pratiques).

4. CAS PARTICULIERS IMPORTANTS DE PETITES MAILLES

Voyons maintenant deux cas particuliers de petites mailles :

- a) Les directions principales d'anisotropie sont parallèles aux directions de maille.

On a alors (fig. VIII - 6) :

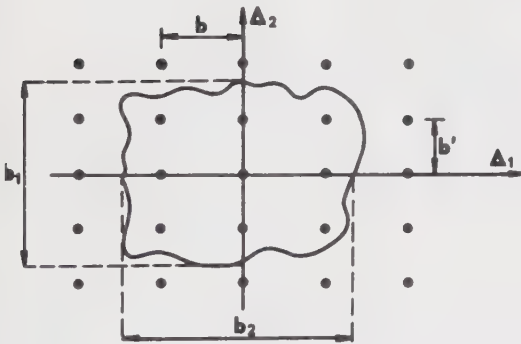


Figure VIII-6

Maille parallèle aux directions principales d'anisotropie.

$$\beta' = \frac{D_2}{D_1} b'$$

$$\beta = b$$

$$\mu = \frac{D_2}{D_1} \lambda$$

λ étant le rapport $\frac{b'}{b}$ des dimensions de la maille.

$$(VIII, 10) \quad \frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{s}} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{D_2 \lambda}{D_1} \right)^{1/2} + 0,0609 \left(\frac{D_2 \lambda}{D_1} \right)^{-3/2} \right]$$

b) Gisement reconnu par des traversées parallèles (fig. VIII - 7)

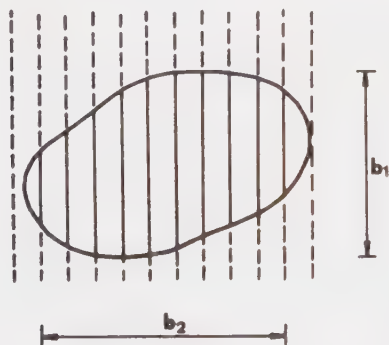


Figure VIII-7
Gisement reconnu par
traversées parallèles

Pour que la formule (VIII - 10) ait un sens, il faut qu'elle converge vers une valeur finie, non nulle lorsqu'on multiplie indéfiniment le nombre de sondages sur les lignes, c'est-à-dire lorsqu'on a une connaissance parfaite des lignes. Le gisement est reconnu par des traversées parallèles, des tranchées par exemple. La formule s'obtient en faisant dans (VIII, 10) :

$$\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{s}} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{D_2 b'}{D_1 b} \right)^{1/2} + 0,0609 \left(\frac{D_1 b}{D_2 b'} \right)^{3/2} \right]$$

$$n = \frac{s}{bb'} \quad b' \text{ tendant vers } 0$$

$$\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \sqrt{\frac{D_1 D_2}{s^2}} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{1/2} b b'^2 + 0,0609 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^{3/2} b^3 \right]$$

Le premier terme tend vers 0 avec b'

III, 12)
$$\frac{\sigma_s^2}{s} = 0,0609 \frac{D_1^2 b^3}{D_2}$$

5. ESTIMATION TRANSITIVE DES SURFACES PAR RECONNAISSANCE A MAILLE GRANDE

Nous avons remarqué que le problème géométrique était susceptible d'une solution dans les deux cas extrêmes : mailles de dimensions petites vis à vis de celles du gisement, ce que nous venons d'examiner, et mailles de dimensions grandes vis à vis de celles du gisement, ce que nous allons regarder maintenant.

Soit s la surface du gisement et S la surface de la maille (fig. VIII - 8).

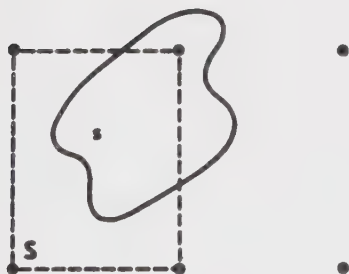


Figure VIII-8
Maille grande par rapport
au gisement.

Les dimensions de la maille étant grandes vis à vis de celles du gisement, un sondage au plus tombera dans le gisement. L'efficacité de la reconnaissance est donc la même que si on implantait un point aléatoire dans la maille S. La probabilité à priori pour que ce point soit dans le gisement est :

$$P = s / S$$

La question est alors, en tous points, analogue au problème du prélèvement dans une urne de Bernouilli. La probabilité à priori $p = s/S$ est estimée, lors d'une expérience unique par 1 si le point tombe dans s et par 0 s'il tombe à l'extérieur. La variance d'un seul prélèvement de la variable aléatoire prise égale à 1 si le point tombe dans s et à 0 si elle tombe à l'extérieur de s est (c'est-à-dire la variance d'estimation du rapport s/S) :

$$\sigma_p^2 = p(1-p)$$

$$D^2 \left(\frac{s}{S} \right) = \frac{s}{S} \left(1 - \frac{s}{S} \right)$$

$$\sigma_s^2 = D^2(s) = s(S-s)$$

$$\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{S}{s} - 1$$

$\frac{S}{s}$ n'est autre que l'inverse du "nombre" $\underline{n}$ de sondages positifs ($n < 1$)

$$(VIII, 13) \quad \frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{1}{n} - 1$$

6. PROBLEME DES MAILLES MOYENNES

Dans le cas, que l'on ne sait pas traiter, où les dimensions de la maille seraient de l'ordre de grandeur de celles du gisement, on interpolera graphiquement entre les courbes représentatives des variations de $\frac{\sigma_s^2}{s^2}$ en fonction de n :

c'est-à-dire (VIII, 7) et (VIII, 13) pour les mailles régulières :

$$\begin{aligned} \text{VIII, 7)} \quad & \left(\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{D_1 D_2}{s}} \left[\frac{1}{6} \mu^{1/2} + 0,0609 \mu^{-3/2} \right] \right) \\ \text{VIII, 13)} \quad & \left(\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{1}{n} - 1 \right) \end{aligned}$$

ou bien (VIII, 7) et (VIII, 13) pour les mailles aléatoires stratifiées avec quelques réserves d'ordre théorique au sujet de l'établissement de la formule (VIII, 13) en ce cas :

$$\begin{aligned} \text{VIII, 7)} \quad & \left(\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{k}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{s}} \right) \\ \text{VIII, 13)} \quad & \left(\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{1}{n} - 1 \right) \end{aligned}$$

7. RECONNAISSANCE A MAILLE VARIABLE

Retournons maintenant à des mailles petites vis à vis du gisement, mais variables. C'est par exemple le cas de la reconnaissance du gisement de fer lorrain, qui à cause de sa très grande étendue a été reconnu à plusieurs époques différentes par des concessionnaires différents, au cours de campagnes à maille plus ou moins dense. Les bords du gisement n'y sont, par conséquent, pas définis partout avec le même degré d'exactitude. Comme cas particulier de cette remarque, il faut signaler aussi l'existence d'un très long affleurement, variable selon la couche étudiée, mais de l'ordre de grandeur de la moitié du périmètre de la minéralisation. On peut assimiler cet affleurement - parfaitement délimité dans l'espace à une frontière reconnue par maille infiniment petite. Dans ce cas, on admettra, ce qui constitue une approximation assez bien vérifiée en pratique ou dans les simulations qu'on peut faire, que les variances correspondant à chaque tronçon reconnu par une maille donnée s'ajoutent ; on peut associer à chaque portion de la bordure, même si elle n'est pas fermée, une variation diamétrale dans chaque direction du plan. On prendra la formule de MATHERON-FORMERY dans son expression (VIII, 7 bis) qui fait intervenir la taille de la maille plutôt que la surface à estimer et le nombre de sondages positifs. Par exemple, la figure (VIII-9) offre quatre zones correspondant à 5 types de mailles : z_1 , régulière ; z_2 et z_3 aléatoires stratifiées de tailles différentes ; z_4 infiniment petite (affleurement) ; z_5 limite de concession connue et arbitraire. Dans l'approximation adoptée, où les variances de z_4 et z_5 sont nulles, et si S est la surface totale à estimer, il vient :

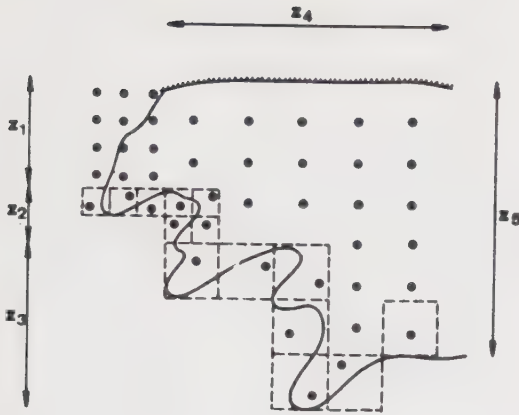


Figure VIII-9

Gisement reconnu par mailles
variables mais petites.

$$I, 14) \left(\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{1}{S^2} \left[\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2 + \sigma_{z_3}^2 \right] = \frac{1}{S^2} \left[k_1 A_1^{3/2} \sqrt{D_1 D'_1} \right. \right. \\ \left. \left. + k_2 A_2^{3/2} \sqrt{D_2 D'_2} + k_3 A_3^{3/2} \sqrt{D_3 D'_3} \right] \right)$$

Cette approximation, plutôt pessimiste, est en fait assez bien vérifiée en pratique ; on peut le constater aisément en appliquant la formule (VIII, 14) à une figure géométrique simple (cercle, rectangle) reconnue par des mailles petites différentes. Elle va nous permettre, dans l'exercice G des études pratiques, d'illustrer cette étude par l'estimation de la surface de la couche la plus importante du gisement de fer, la couche grise du bassin de Briey. Cette illustration est le symétrique des exemples pétrographiques relatifs aux lames minces et sections polies du chapitre VI. Il s'agissait alors de la formulation en théorie intrinsèque d'estimation de variables géométriques ; il s'agit maintenant de variables géométriques transitives.

ANNEXE

CHAPITRE IX

L'ESTIMATION PAR SONDAGES ET TRAÇAGES

SOMMAIRE

L'estimation par sondages et traçages constitue le prolongement naturel du problème de krigeage, lorsqu'on passe du panneau à l'échelle technologique supérieure et qu'on ne désire connaître que les paramètres moyens d'une zone de plusieurs panneaux, sans différentier ceux-ci. Le choix de l'estimateur se trouve alors simplifié, et l'on utilise de simples moyennes arithmétiques (mailles régulières), parfois pondérées par la surface des polygones d'influence (mailles plus ou moins aléatoires). L'estimation de la variance devient par contre plus difficile, car les lois de superpositions des krigeages ne s'appliquent qu'aux pondérateurs et non pas aux variances associées. L'on doit donc déterminer des règles de calcul partant du variogramme ou de la composition des variances d'extensions élémentaires pour atteindre la variance d'estimation globale.

Après que ce problème ait été posé au paragraphe 1, on aborde au paragraphe 2 l'étude des mailles régulières à une dimension, en distinguant le cas des représentations transitives, puis des représentations intrinsèques. La formulation des problèmes en intrinsèque est un peu différente selon que l'implantation est préférentielle ou flottante, ce dernier cas servant en quelque sorte d'intermédiaire entre le premier et la formulation en représentation transitive. On remarque enfin que les dispositifs centrés (sondages centraux) et les dispositifs fermés (sondages d'angles) se calculent de la même manière.

Le paragraphe 3 généralise les résultats du précédent aux régionalisations à plusieurs dimensions. Un principe de calcul est posé, celui de la composition des termes de tranches et de sections, qui repose sur certaines approximations largement vérifiées en pratique et qui ramène tous les calculs à une série de problèmes unidimensionnels. On analyse ensuite la liaison entre les mailles régulières à angles droits (rectangles et parallélépipèdes) et celles qu'on en déduit par affinités d'axes obliques (parallélogrammes, prismes obliques) là encore des règles d'équivalence très simples apparaissent.

Le paragraphe 4 traite des mailles aléatoires pures ou stratifiées et débouche sur un formalisme parallèle à celui du paragraphe 2, tant en transitatif qu'en intrinsèque. Par contre, à la différence des premiers paragraphes, les problèmes, plus simples, sont posés directement dans l'espace à n dimensions.

Après avoir rapidement analysé au paragraphe 5 le problème de l'estimation simultanée des trois paramètres miniers usuels, puissance, teneur et accumulation, on conclut le chapitre sur une remarque restrictive, en indiquant la quasi-impossibilité de la géostatistique à extrapoler ces trois paramètres.

1. INTRODUCTION

L'application de la théorie du krigeage a permis de reconnaître un panneau, à partir du réseau des sondages qui l'entoure. Dans ces estimations, seules les reconnaissances proches de la zone à estimer étaient individualisées, et les autres, situées à des distances supérieures à la portée, jouaient toutes, par définition même du phénomène de transition, des rôles analogues. Enfin par superposition des krigeages, on construisit, petit à petit, un estimateur détaillé de tout le gisement. Du reste, on se doute bien qu'à la fin de ce calcul par morceaux, la somme des poids attribuée à chaque sondage demeure sensiblement la même (exception faite des bords), et que seule la ventilation des poids à travers les panneaux varie d'une reconnaissance à une autre. Aussi, pour autant qu'on veuille étudier dans son ensemble une portion de gisement V à l'aide de N sondages de teneurs $f(x_i)$ implantés plus ou moins régulièrement, il est inutile de recourir à une approche aussi détaillée et compliquée que le krigeage, et tout à fait légitime de prendre en général, l'estimateur :

$$(X, 1) \quad Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

qui est une simple moyenne arithmétique. Parallèlement à ce changement d'échelle technologique apparaît une difficulté : les variances de krigeage ne sont pas superposables, et l'étude de la précision de la reconnaissance doit être reprise à la base. On définira donc la variance d'estimation par la

formule fondamentale (II, 9) du chapitre II :

$$(IX, 2) \quad D^2 (Y - Z) = \frac{2}{N V} \sum_i \int \gamma(x - x_i) dx - \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx'$$

Naturellement, si N est grand, le calcul direct de l'expression (IX, 2) devient assez pénible, et l'on est conduit à chercher des formules d'approximation. Nous n'exposerons pas ici les cheminements théoriques qui ont permis à G. MATHERON d'établir ces simplifications (variables régionalisées ch. XII). Il suffit de les énoncer et d'explicitier en détail les cas particuliers qui nous seront utiles.

Dans chacun des deux principaux types de mailles, régulier et aléatoire stratifié, il y a lieu de distinguer les divers modes d'implantation, flottante ou préférentielle. Cette dernière est spécifique aux schémas intrinsèques, alors que la première est définissable aussi en représentations transitives. Nous fournirons successivement les expressions des opérateurs linéaires de variance d'estimation en représentation transitive, en schéma intrinsèque à maille flottante, puis préférentielle, dans le cas des mailles régulières à une dimension (par. 2) puis à plusieurs dimensions (par. 3). Le paragraphe 4 traitera des mailles aléatoires et aléatoires stratifiées ; on terminera le chapitre par les comparaisons des différents modes de reconnaissance (par. 5).

2. MAILLES REGULIERES A UNE DIMENSION

2.1. Représentations transitives

Si $g(h)$ est le covariogramme de la représentation et a la maille, la variance d'estimation à une dimension s'écrit :

$$(IX, 3) \quad \sigma^2(a) = a g(0) + 2a \sum_{1}^{\infty} g(na) - 2 \int_a^{\infty} g(x) dx$$

On appellera cet opérateur linéaire $\xi_a(g)$.

Pour estimer la variance (IX, 3) on ne peut pas partir des valeurs expérimentales $g(ka)$ du $g(h)$ mesuré ; elles donneraient identiquement zéro. Aussi bien, il est théoriquement impossible de déduire des mêmes données expérimentales à la fois une estimation et la précision de cette estimation. On doit se donner à priori une expression mathématique du covariogramme $g(\lambda, h, \mu \dots)$ dont les paramètres λ, μ , seront déterminés par ajustement sur les valeurs expérimentales des $g(ka)$. C'est à la fonction $g(h)$ ainsi déterminée qu'on appliquera les formules de variances. Naturellement, le résultat obtenu vaudra ce que vaudra le modèle. En intrinsèque, on retrouve la même difficulté, mais il faut bien voir dans un cas comme dans l'autre, que le $g(h)$ ou le $\chi(h)$ sont des courbes incomparablement plus simples que les régionalisations elles-mêmes, donc plus faciles à estimer, et qu'elles ont la signification d'une erreur quadratique. Une erreur sur une erreur peut être pratiquement acceptable. Tous les développements qui suivent porteront donc sur les modèles théoriques $g(h)$ et $\chi(h)$.

Dans les applications, on utilisera les résultats approchés, très simples, suivants.

Supposons que le $g(h)$ admette au voisinage de l'origine un développement limité valable jusqu'à $h = a$, valeur de la maille.

$$(IX, 4) \quad g(h) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} h^{\lambda}$$

Nous ferons correspondre à chaque terme de ce développement un terme $T(a)$ de la variance d'estimation, en sorte que

$$(IX, 5) \quad \sigma^2(a) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} T(a^{\lambda})$$

Les valeurs numériques de cette correspondance (poussée jusqu'à l'ordre 6) sont les suivantes :

	au terme en	h	correspond	$T(a) = -\frac{a^2}{6}$
	"	"	"	$T(a^2) = 0$
	"	"	"	$T(a^3) = \frac{a^4}{60}$
(IX, 6)	"	"	"	$T(a^4) = 0$
	"	"	"	$T(a^5) = -\frac{a^6}{126}$
	"	"	"	$T(a^6) = 0$
	au terme en	$h^2 \log h$	"	$T(a^2 \log a) = \frac{11}{3} \cdot 0,058 \cdot a^3$
	"	"	"	$T(a^4 \log a) = -\frac{11}{5} \cdot 0,025 \cdot a^5$

2.2. Schémas intrinsèques - réseau à implantation flottante

Supposons que dans un champ fini à l'intérieur duquel règne un schéma intrinsèque $f(x)$ (la variable $f(x)$ sera conventionnellement supposée nulle à l'extérieur de V), un réseau régulier de prélèvements ait été implanté d'une manière quelconque, c'est-à-dire sans tenir compte de la géométrie du champ. Comme $f(x)$ est supposée nulle à l'extérieur de V , on peut supposer le réseau infini et admettre que l'un des prélèvements, choisi comme origine du réseau, a été implanté en un point u choisi au hasard dans le segment base de la maille. Tous les autres prélèvements sont alors effectués aux points $x_k = u + ka$, a représentant la maille et k étant un système d'entiers quelconques. On voit que le dispositif ainsi schématisé ne diffère pas de celui qui a été utilisé au paragraphe IX. 2. 1. pour la théorie de l'estimation transitive. Cette remarque permet de résoudre facilement le problème intrinsèque correspondant.

Désignons par $K(h)$ le covariogramme géométrique affecté au champ V . En représentation transitive, le covariogramme $g(h)$ de la variable régionalisée $f(x)$ limitée au champ V peut se déduire (en valeur probable) de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$, à l'aide de la relation (III, 48) :

$$g(h) = \left[m^2 + \sigma^2(0/V) \right] K(h) - K(h) \gamma(h) \quad \text{I, 7)}$$

L'erreur commise sur l'estimation de la quantité de métal

$$Q = \int_V f(x) dx$$

est caractérisée par une variance d'estimation transitive, que nous désignerons

par σ_Q^2 , et qui se calcule en appliquant à $g(h)$ l'opérateur ξ_a défini en (IX, 3) :

$$(IX, 8) \quad \sigma_Q^2 = \left[m^2 + \sigma^2 (0/V) \right] \xi_a(K) - \xi_a(K, \gamma)$$

On a vu au paragraphe 2, 1. comment devait se conduire le calcul d'une telle variance. On remarquera de plus sur (IX, 8) que $\xi_a(K)$ n'est pas autre chose que la variance d'estimation transitive du volume du champ V , estimé à partir du même réseau de prélèvement. Cette variance $\xi_a(K)$ est aussi appelée variance géométrique σ_V^2 .

$$(IX, 9) \quad \sigma_V^2 = \xi_a(K)$$

En portant dans (IX, 8) on obtient, entre la variance géométrique et celle de la quantité de métal, la relation :

$$(IX, 10) \quad \sigma_Q^2 = \left[m^2 + \sigma^2 (0/V) \right] \sigma_V^2 - \xi_a(K, \gamma)$$

En ce qui concerne la teneur moyenne $m = \frac{Q}{V}$, elle est estimée avec une erreur relative de variance $\frac{\sigma_m^2}{m^2}$. Mais la variable régionalisée $f(x)$ doit être considérée comme $\frac{\sigma_m^2}{m^2}$ indépendante de son champ, puisque précisément cette indépendance interne est une condition nécessaire pour que la description de $f(x)$ par un schéma intrinsèque soit possible. Par suite, on a :

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V^2}{V^2}$$

Cette relation exprime, on le sait, que le volume et la teneur moyenne sont estimés indépendamment l'un de l'autre. Remplaçant σ_Q^2 par son expression (IX, 10), tenant compte de la relation évidente $Q = m V$, et en désignant par $\sigma^2 = \sigma^2 (0/V)$ la variance de $f(x)$ dans V , on obtient finalement :

$$\text{X, 11)} \quad \frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \frac{\sigma_V^2}{V^2} - \sum_a \left(\frac{K \cdot \gamma}{Q^2} \right)$$

Si le champ V est exactement connu, le terme $\frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \frac{\sigma_V^2}{V^2}$, qui représente la répercussion de l'erreur géométrique sur l'estimation de la teneur doit être annulé et il reste alors simplement :

$$\text{X, 12)} \quad \sigma_m^2 = - \sum_a \left(\frac{K \cdot \gamma}{V^2} \right)$$

La variance d'estimation intrinsèque se calcule comme une variance d'estimation transitive pour le covariogramme $-\frac{K \gamma}{V}$. En général, cependant, V n'est pas connu à priori et on doit ajouter le terme géométrique supplémentaire $\frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \frac{\sigma_V^2}{V^2}$ de la formule (IX, 11).

On n'oubliera pas que ces formules (IX, 11) et (IX, 12) ne sont valables que si $f(x)$ est indépendante de son champ, au sens de l'indépendance interne, c'est-à-dire pratiquement en l'absence de dérive zonée : c'est d'ailleurs dans ce cas seulement que la théorie intrinsèque peut être utilisée.

Les formules qui précèdent ne sont pas tabulées sur abaques. Une telle présentation aurait été assez lourde, car elle aurait dépendu des divers C_λ et du terme auquel on aurait choisi d'arrêter le développement limité du $g(h)$.

Cependant, très souvent, on pourra affecter une équation linéaire au covariogramme, soit que la maille soit suffisamment petite, soit qu'effectivement la décroissance de $g(h)$ se rapproche de celle d'une droite. Dans ces cas, il suffit tout simplement de se référer aux deux abaques du chapitre précédent, sur les variances d'estimation des surfaces. Ils ne supposent en rien que la régionalisation est une fonction en tout ou rien et peuvent sans aucune modification s'appliquer à n'importe quel $g(h)$ linéaire.

2.3. Schémas intrinsèques, mailles à implantation préférentielle

Ce troisième cas est le plus courant en pratique. On supposera d'abord que les N prélèvements sont implantés au centre de leurs zones d'influence. Deux méthodes d'approximations sont possibles. Nous les indiquons toutes deux. On appliquera plutôt la première (correspondance terme à terme) au schéma GAUSSINET au schéma de FORMERY, et la seconde (composition des variances d'extension) au schéma de MATHERON et aux variogrammes linéaires. On peut d'ailleurs voir dans l'exercice I de la troisième partie que les résultats sont équivalents.

1ère méthode : correspondance terme à terme

Le principe du calcul est exactement le même qu'en transitif. Si $\gamma(h)$ admet un développement limité de la forme :

$$(IX, 13) \quad \gamma(h) = \sum C_{\lambda} h^{\lambda}$$

utilisable jusqu'en $h = a$, la variance d'extension correspondant à un segment

de droite reconnu par N prélèvements (réseau centré) s'écrit :

$$(IX, 14) \quad \sigma_{(a)}^2 = \sum_{\lambda} C_{\lambda} T' (a^{\lambda})$$

Explicitons les valeurs de T' usuelles (ce ne sont plus les mêmes qu'en transitif) :

(IX, 15)	terme en h	$T' (a) = \frac{1}{N} \cdot \frac{a}{6}$
	" h^2	$T' (a^2) = \frac{1}{N^2} \cdot \frac{a^2}{144}$
	" h^3	$T' (a^3) = \frac{-1}{N} \cdot \frac{a^3}{160}$
	" h^4	$T' (a^4) = \frac{-1}{N^2} \cdot \frac{7}{1440} a^4$
	" h^5	$T' (a^5) = \frac{1}{N} \cdot \frac{a^5}{126}$
	terme en $h^2 \log h$	$T' (a^2 \log a) = \frac{-1}{N} \cdot \frac{\tilde{11}}{3} \cdot 0,058 a^2$
	" $h^4 \log h$	$T' (a^4 \log a) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\tilde{7}}{5} \cdot 0,025 a^4$

Souvent, on pourra négliger les termes en N^2 . Cette approximation est d'autant plus acceptable que les formules ci-dessus, elles-mêmes approchées, le sont d'autant mieux que N est grand.

Deuxième méthode : composition des variances d'extension

Appelons σ_E^2 la variance d'extension élémentaire de chaque échantillon pour sa zone d'influence. Si l'on admet que les erreurs commises en

étendant à deux zones d'influence distinctes les teneurs des échantillons prélevées en leurs centres sont deux erreurs indépendantes, la variance totale σ_N^2 s'écrit très simplement :

$$(IX, 16) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \cdot \sigma_E^2$$

Si la maille n'est pas très régulière et que les longueurs des zones d'influence sont variables, on pondérera les variances d'extension élémentaires, cette fois-ci différentes les unes des autres, par les carrés des longueurs des zones d'influence.

2.4. Schémas intrinsèques, cas du dispositif fermé

Les formules ci-dessus s'appliquent à un dispositif centré, dans lequel le champ L à estimer est la somme des N segments d'influence de longueur a au centre de chacun desquels un prélèvement a été implanté. En pratique, on a souvent affaire à un dispositif différent, appelé dispositif fermé, dans lequel le champ à estimer est le segment L compris entre le premier et le dernier échantillon prélevé.

Dans ces cas, on démontre la règle pratique suivante :

La variance d'estimation d'un dispositif fermé à $N + 1$ échantillons se calcule comme celle du dispositif centré à N échantillons admettant même maille a et même champ $L = Na$.

Cette règle peut être appliquée, en pratique, même si N est petit

(mais supérieur à 1), et même si le développement limité de $\gamma(h)$ n'est pas utilisable jusqu'à $h = a$: dans ce dernier cas, on aura :

$$\text{IX, 17)} \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \quad \sigma_E^2 = \frac{1}{N} \left[2 X\left(\frac{a}{2}\right) - F(a) \right]$$

σ_E^2 étant la variance d'extension élémentaire du dispositif centré de même maille.

Le seul cas d'exception, pratiquement, est celui où l'on a $N = 1$, c'est-à-dire le cas où l'on veut estimer un segment de longueur a à l'aide de deux échantillons implantés à ses deux extrémités. Dans ce cas, la formule générale prend la forme très simple

$$\text{IX, 18)} \quad \sigma_1^2 = \sigma_F^2 = 2 X(a) - \frac{1}{2} \gamma(a) - F(a)$$

L'expression (IX, 18) peut être appelée variance d'extension élémentaire du dispositif fermé σ_F^2 et on se gardera bien de la confondre avec celle du dispositif centré, désignée ci-dessus par σ_E^2 . Lorsqu'on applique le principe de composition des variances d'extension à un dispositif fermé, c'est toujours la variance σ_E^2 du dispositif centré, et non pas celle du dispositif fermé, qui doit être divisée par N (nombre des échantillons moins 1), conformément à (IX, 17).

3. MAILLES REGULIERES A PLUSIEURS DIMENSIONS

3.1. Composition de termes de tranche et de termes de sections

Dans le réseau des points de prélèvements x_i , il est aisé de distinguer des plans et des droites de plus grande densité. Raisonnons par exemple dans l'espace à trois dimensions. En attribuant la teneur moyenne des prélèvements aux lignes de plus grande densité, celle des lignes supposée connue, aux plans de plus grande densité, celle enfin des plans au champ V entier, on commet trois erreurs d'extension successives, qui doivent, naturellement s'ajouter. Si ces trois erreurs ont des covariances nulles, la variance d'estimation résultante sera simplement la somme des trois variances d'extension correspondant à ces trois erreurs :

(IX, 19)

$$\sigma_N^2 = \sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2 + \sigma_{N_3}^2$$

Les trois variances $\sigma_{N_1}^2$, $\sigma_{N_2}^2$ et $\sigma_{N_3}^2$ d'extension des points aux lignes, les lignes aux plans N_1 et des N_2 plans au N_3 champ total portent, respectivement, les noms de terme de ligne, terme de section et terme de tranche.

Naturellement, le principe de composition exprimé en (IX, 19) ne peut avoir de valeur que dans la mesure où les trois erreurs d'extension sont effectivement indépendantes, ou, du moins, peuvent être regardées comme telles en première approximation. L'intuition suggère bien qu'il doit en être ainsi, du moins pour des fonctions intrinsèques n'ayant pas un comportement trop régulier à l'origine. Cette intuition est confirmée par le calcul, tout au moins dans le cas des représentations transitives et la parenté profonde des deux modes d'approche et des formules qu'on en déduit nous le feront admettre pour les fonctions intrinsèques usuelles.

Dans ces conditions, les problèmes relatifs à l'espace à n dimensions se ramènent à une succession de problèmes unidimensionnels qu'on peut traiter à l'aide des règles du paragraphe 2. (L'exemple I, de la troisième partie, illustre les règles du calcul des variances d'estimation à plusieurs dimensions).

Matériellement parlant, toutes les variances dont on a besoin pour le calcul (variance d'un point central dans un segment, d'une galerie centrale dans un panneau rectangulaire, etc...) sont soit exprimées formellement quand elles sont très simples et sinon tabulées dans la troisième partie.

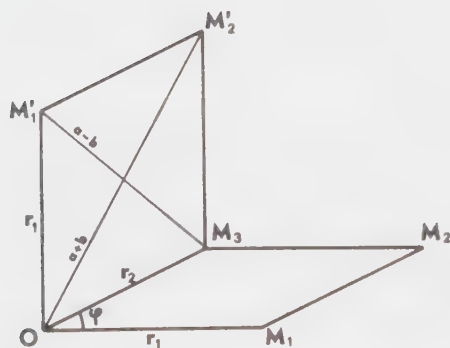
3.2. Mailles régulières non rectangulaires

Il arrive souvent en pratique que les réseaux de prélèvements soient construits sur des parallélogrammes quelconques, des losanges (deux dimensions) ou des parallélépipèdes obliques (à trois dimensions). Le principe de composition des termes de tranches et de section s'étend de lui-même et les formules établies subsistent. Il suffit pour $n = 3$ de prendre la distance entre prélèvements sur les lignes de plus grande densité la distance entre ces lignes et la distance entre plans de plus grande densité.

Si l'anisotropie est suffisamment faible pour qu'on adopte le principe de composition des variances d'extension, on admettra que tous ces parallélogrammes circonscrits à une même ellipse sont équivalents (id. à trois dimensions pour les parallélépipèdes circonscrits à un même ellipsoïde).

Nous donnons ci-contre (fig. 1) une construction géométrique simple pour déterminer les coordonnées du rectangle, ou du carré équivalent. On sait que :

$$(IX, 20) \quad \begin{cases} r_1 r_2 \sin \varphi = ab \\ r_1^2 + r_2^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$



Parallélogramme de maille $OM_1M_2M_3$.

On construit : $M'_2M'_3 \parallel OM_2$

$$|OM'_3| = |OM_1|$$

$$|M'_2M'_3| = |OM_2|.$$

On a :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} (|OM'_3| + |M'_2M'_3|) \\ b = \frac{1}{2} (|OM'_3| - |M'_2M'_3|) \end{cases}$$

Figure IX-1 : Détermination géométrique du rectangle de côtés a, b équivalent au parallélogramme r_1, r_2, φ .

4. MAILLES ALEATOIRES STRATIFIEES ET ALEATOIRES PURES

Ces différentes mailles sont beaucoup plus simples à traiter que les précédentes ; on les explicitera directement à n dimensions.

4. 1. Représentations transitives

Dans le cas des représentations transitives, soit P le parallélépipède de base, de volume (a) et de covariogramme géométrique $\tilde{w}(h)$. Il vient :

$$X, 21) \quad \sigma^2(a) = (a) \left[g(0) - \frac{1}{(a)^2} \int g(h) \tilde{w}(h) dh \right]$$

la variance d'estimation est le produit du volume (a) de la maille par la différence entre $g(0)$ et la valeur moyenne de $g(h)$ dans le parallélépipède de base P. Elle ne dépend que du comportement de $g(h)$ dans ce parallélépipède et prend une valeur d'autant plus élevée que la décroissance de $g(h)$ dans P est plus rapide, donc que la régionalisation est moins régulière quand P croît. A la limite, si le champ de la régionalisation est tout entier contenu dans P, et qu'il est reconnu par N échantillons implantés indépendamment les uns des autres (maille aléatoire pure), il suffit de diviser par N l'expression (IX, 21) de σ_a^2 .

4. 2. Schémas intrinsèques

La maille aléatoire pure correspond au cas où les N prélèvements sont implantés au hasard, indépendamment les uns des autres, dans le

champ V à estimer, selon une loi de probabilité uniformément répartie dans V . La variance d'estimation associée à l'estimateur

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

a pour expression :

$$(IX, 22) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \cdot \sigma^2 (0 / V)$$

Elle sobtient en divisant par le nombre N des échantillons la variance dans V de la variable ponctuelle. Ce résultat est bien conforme à ce que l'on pouvait prévoir, puisque les $f(x_i)$, relativement au tirage au sort des x_i , sont des variables aléatoires indépendantes de la variance $\sigma^2 (0/V)$.

Dans une maille aléatoire stratifiée, le champ V à estimer est découpé en zones d'influence v_i égales entre elles et translatées les unes des autres. Dans chaque v_i on implante au hasard un prélèvement au point x . On doit distinguer ici deux cas différents selon que V est ou non connu à priori :

4.2.1. Cas où le champ est connu

Le champ V est, par construction, la réunion des zones d'influence v_i . La variance d'estimation admet maintenant pour valeur :

$$(IX, 23) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \cdot \sigma^2 (0 / v)$$

La variance d'estimation d'une maille aléatoire stratifiée s'obtient, dans le cas où le champ est connu à priori, en divisant par le nombre N d'échantillons la variance $\sigma^2(0/v)$ de chacun d'eux dans sa zone d'influence égale à v .

Ce résultat doit être comparé avec (IX, 22). Il apparaît que la maille aléatoire stratifiée donne toujours une variance d'estimation plus faible que la maille aléatoire pure, la différence étant :

$$\frac{1}{N} \left[\sigma^2(0/v) - \sigma^2(0/V) \right] = \frac{1}{N} \sigma^2(v/V)$$

c'est-à-dire égale à la variance dans V de la zone d'influence v , divisée par le nombre N des zones d'influence.

4.2.2. Cas où le champ n'est pas connu

Il arrive souvent que les limites de la régionalisation ne soient pas connues exactement au moment où l'on implante le réseau aléatoire stratifié. Le quadrillage des zones d'influence v_i est dessiné à priori et tout se passe comme s'il était implanté dans son ensemble de manière aléatoire relativement à V . On est ainsi ramené à un problème d'estimation transitive.

En effet, la variance d'estimation se met sous la forme suivante :

$$(24) \quad \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{N} \left[1 - \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \frac{K(x-x')}{V} dx dx' \right] + \frac{1}{nv^2} \int_v \int_v \frac{K(x-x')}{V} \gamma(x-x') dx dx'$$

La variance d'estimation d'une maille aléatoire stratifiée, dans le cas où le champ V n'est pas connu à priori, est la somme de deux termes. Le premier proportionnel à $\frac{\sigma^2}{N}$ représente un effet de bordure. Le deuxième se calcule, comme s'il s'agissait d'une variance à champ connu, en appliquant (IX, 23) à la fonction intrinsèque $\frac{K(h)}{V} \gamma(h)$. ($K(h)$ est le covariogramme géométrique du champ).

Remarque :

En maille régulière, dès que N dépasse quelques unités, on adopte pour estimateur du gisement la moyenne des reconnaissances (cf. par. 1).

En maille aléatoire stratifiée, on procède plutôt à l'aide d'un pseudo-krigeage, en découpant le gisement en polygones (médiatrices entre reconnaissances) ou en triangles (segments joignant ces reconnaissances) ou à 3 dimensions en prismes centrés ou fermés. Dans ces méthodes, également valables et qui donnent en définitive des résultats sensiblement voisins (avec un très léger avantage pour les réseaux centrés), on pondère les teneurs des sondages par les surfaces dans lesquelles ils interviennent. Ce krigage est très sommaire puisqu'il ne permet pas de déterminer la teneur d'un panneau autre que le polygone qu'on a choisi, et même pour ce polygone, ne tient pas compte de l'environnement. Il reste néanmoins valable pour le choix d'un estimateur de la moyenne de tout le gisement.

Cependant, lors du calcul de la variance d'extension correspondante, il n'est pas nécessaire de reprendre le même découpage qui déboucherait sur des calculs de variance fort compliqués, et l'on peut superposer au réseau des sondages la grille aléatoire stratifiée, à la condition que les surfaces totales de la grille et du découpage en polygones soient sensiblement les mêmes et se recouvrent bien.

5. ESTIMATIONS SIMULTANÉES DU MINÉRAI, DU MÉTAL ET DE LA TENEUR MOYENNE (Schémas intrinsèques)

Les trois variables de puissance "h", teneur "m" et accumulation "a" sont reliées par l'expression :

$$\text{IX, 25)} \quad a = h \cdot m$$

Chacune d'elles peut être estimée directement, à partir de son propre variogramme, ou être atteinte indirectement à partir de (IX, 25) et des variances et covariances des deux autres variables. Étudions cette seconde approche en nous plaçant dans le cas le plus général, celui où le champ n'est pas connu à priori. (On passerait au cas du champ connu, en mailles régulières ou aléatoires stratifiées, en retranchant le terme d'effet de bordure).

Nous désignerons par h la puissance de la formation en un point, par σ_h^2 sa variance, par $\bar{h}$ la puissance moyenne et par $D^2(\bar{h})$ la variance d'estimation des puissances, c'est-à-dire la variance de la puissance moyenne $\bar{h}$.

De même, on pourra noter a l'accumulation en un point, par σ_a^2 la variance des accumulations, par $\bar{a}$ l'accumulation moyenne, par $D^2(\bar{a})$ la variance d'estimation des accumulations, c'est-à-dire la variance de l'accumulation moyenne $\bar{a}$.

D'une façon générale, nous utiliserons entre variances relatives les relations approchées du type :

$$\frac{D^2(xy)}{(xy)^2} = \frac{D^2(x)}{x^2} + \frac{D^2(y)}{y^2} + 2 \rho_{xy} \frac{D(x)}{x} \cdot \frac{D(y)}{y}$$

$$\frac{D^2(y/x)}{(y/x)^2} = \frac{D^2(x)}{x^2} + \frac{D^2(y)}{y^2} - 2 \rho_{xy} \frac{D(x)}{x} \cdot \frac{D(y)}{y}$$

et si les variables x et y sont indépendantes :

$$(IX, 26) \quad \frac{D^2(xy)}{(xy)^2} = \frac{D^2(x)}{x^2} + \frac{D^2(y)}{y^2}$$

A l'aide de telles relations, on calculera les variances relatives d'estimation du minerai $\frac{\sigma_T^2}{T^2}$, celle du métal $\frac{\sigma_Q^2}{Q^2}$ et celle de la teneur

moyenne :

$$m = \frac{\bar{a}}{\bar{h}}$$

$$\frac{D^2(m)}{m^2} = \frac{D^2(\bar{a})}{\bar{a}^2} + \frac{D^2(\bar{h})}{\bar{h}^2} - 2 \rho_{\bar{a}\bar{h}} \frac{D(\bar{a})}{\bar{a}} \frac{D(\bar{h})}{\bar{h}}$$

comme l'on ne sait pas calculer le coefficient de corrélation entre les estimations $\bar{a}$ et $\bar{h}$, on admettra qu'il est identique au coefficient de corrélation entre les grandeurs elles-mêmes a et h

$$\rho_{\bar{a}\bar{h}} = \rho_{ah}$$

On aura donc ainsi :

Variance géométrique, c'est-à-dire sur la surface minéralisée.

$$\frac{\sigma_s^2}{s^2} \text{ nous avons appris à la calculer au chapitre VIII}$$

Variance d'estimation de la puissance moyenne.

$$X, 27) \quad \frac{D^2(\bar{h})}{\bar{h}^2} = \frac{\sigma_{Eh}^2}{\bar{h}^2} + \frac{\sigma_h^2}{\bar{h}^2} \cdot \frac{\sigma_s^2}{s^2}$$

σ_{Eh}^2 est la variance d'estimation à champ connu, calculée à partir de la loi de dispersion intrinsèque. Dans le cas fréquent où les puissances, du moins à partir d'une certaine distance, peuvent être tenues pour indépendantes les unes des autres, on a, comme en statistique classique simplement :

$$\frac{D^2(\bar{h})}{\bar{h}^2} = \frac{1}{n} \frac{\sigma_h^2}{\bar{h}^2}$$

Variance d'estimation de l'accumulation moyenne.

$$X, 28) \quad \frac{D^2(\bar{a})}{\bar{a}^2} = \frac{\sigma_{Ea}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\sigma_a^2}{\bar{a}^2} \cdot \frac{\sigma_s^2}{s^2}$$

σ_{Ea}^2 est la variance d'estimation à champ connu, calculée à partir de la loi de dispersion intrinsèque.

Variance d'estimation du minéral.

$$T = s \bar{h}$$

$$(IX, 29) \quad \frac{\sigma_T^2}{T^2} = \frac{\sigma_s^2}{s^2} + \frac{D^2(\bar{h})}{\bar{h}^2}$$

En admettant l'indépendance de h avec son champ.

Variance d'estimation du métal.

$$Q = s \bar{a}$$

$$(IX, 30) \quad \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} = \frac{\sigma_s^2}{s^2} + \frac{D^2(\bar{a})}{\bar{a}^2} + \frac{\sigma_{Ea}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\sigma_s^2}{s^2} \left(1 + \frac{\sigma_a^2}{\bar{a}^2}\right)$$

En admettant l'indépendance de l'accumulation avec son champ (indépendance interne).

Variance d'estimation de la teneur moyenne.

$$(IX, 31) \quad \frac{D^2(\bar{m})}{\bar{m}^2} = \frac{D^2(\bar{a})}{\bar{a}^2} + \frac{D^2(\bar{h})}{\bar{h}^2} - 2 \rho_{ah} \frac{D(\bar{a})}{\bar{a}} \frac{D(\bar{h})}{\bar{h}}$$

Le coefficient de corrélation entre les accumulations et les puissances est calculé à partir des couples accumulations-puissance lus sur un même sondage. Il devra être calculé avec précision, car les termes négatifs compensent à peu près les termes positifs dans la formule.

6. IMPUISSANCE DE LA GEOSTATISTIQUE A DONNER UNE SOLUTION AUX PROBLEMES DES AVAL-PENDAGES ET DES EXTENSIONS

Ainsi, la géostatistique permet d'évaluer l'erreur possible sur des teneurs ou des accumulations moyennes. Elle a même permis de donner un ordre de grandeur de l'erreur géométrique due à la méconnaissance du tracé de la frontière minéralisée.

On notera toutefois, que nous ne nous sommes prononcés que sur les portions de gisement ne débordant pas le périmètre d'influence des travaux miniers de reconnaissance ou des sondages.

La géostatistique est tout à fait incapable de dire, par exemple, ce que pourrait contenir encore une couche au delà de la dernière galerie tracée ou une extension qui n'a pas encore fait l'objet d'une campagne de sondages. La géostatistique n'est pas une baguette magique et ne peut en aucune façon suppléer à une information manquante.

ANNEXE

CHAPITRE X

APPLICATIONS DE LA GEOSTATISTIQUE
A L'ECONOMIE MINIERE

SOMMAIRE

Ce dernier chapitre a pour but d'établir la jonction entre les calculs de géostatistique, de nature technologique, qui ont fait l'objet des chapitres précédents, et leur utilisation dans les problèmes d'économie minière.

On peut présenter ces problèmes de la façon suivante.

A l'issue d'une première phase de travaux de recherches, se pose un problème de décision séquentielle : faut-il fermer, exploiter, poursuivre la reconnaissance ? Il s'agit ici de se prémunir contre un risque de ruine. Celui-ci écarté, se pose en outre un problème d'optimum de reconnaissance en vue d'établir un projet d'exploitation et de définir la dimension des installations.

Ces différentes questions sont traitées successivement au long des paragraphes. Après une brève introduction (paragraphe 1), le paragraphe 2 détaille la méthode de construction du paramètre minier essentiel, la fonction des réserves, reliant le tonnage à la teneur de chaque projet d'exploitation conduisant à un bénéfice maximal.

Le paragraphe 3 étudie les caractéristiques de l'exploitation optimale du gisement, supposé connu. Après avoir défini les paramètres économiques qui entrent en jeu dans le calcul, coûts des investissements, des dépenses annuelles, prix de vente du minerai, on détermine la teneur de coupure et la cadence d'exploitation optimales. Les calculs de ces paramètres techniques doivent être conduits avec un taux d'intérêt nul, le seul qui ne débouche pas sur une politique d'écramage du gisement et sur des cadences d'exploitation illogiques.

On cherche ensuite, dans le paragraphe 4, à préciser le taux de reconnaissance par rapport aux investissements quand les calculs précédents, menés à partir d'estimations plus ou moins exactes du gisement, entraînent une erreur sur le dimensionnement sur la cadence de production. Pour ce faire on relie la perte probable due à ces mauvais choix à la précision de la reconnaissance. L'étude est menée jusqu'au bout dans le cas simple où la teneur de coupure est imposée.

Le paragraphe 5 traite enfin le problème de l'optimisation séquentielle et de l'arrêt des recherches. Là aussi, les calculs ne sont développés explicitement que dans le cas où les décisions à prendre ne dépendent que de la teneur de la portion de gisement étudiée.

1. GEOSTATISTIQUE ET ECONOMIE MINIERE

Le but de cet ouvrage n'est pas l'économie, mais l'étude des phénomènes de transitions géologiques ou miniers. Pourtant, bien que le développement de la géostatistique traite, en ce qui concerne sa plus grosse part, de problèmes techniques, il serait regrettable de n'en pas indiquer la finalité, c'est-à-dire le lien avec l'économie minière. C'est ce que nous allons faire maintenant, en généralisant les études d'optimum, telles qu'elles ont pu apparaître au chapitre IX par exemple, de la troisième partie.

Il sortirait de notre propos de traiter ici complètement des problèmes économiques. De longues discussions sur l'importance relative des divers paramètres économiques ou humains, et sur leurs difficultés d'estimation ne seraient pas à leur place. On se contentera d'exposer le schéma de pensée qui établit la jonction entre le choix d'une politique d'investissements et la géostatistique, et de montrer quelle signification financière il est possible de donner à la notion de variance d'extension.

Cet exposé suit dans l'esprit, et souvent à la lettre la remarquable étude de G. MATHERON et Ph. FORMERY sur "La recherche d'un optimum dans la reconnaissance et la mise en exploitation des gisements miniers" (Annales des mines, mai-juin 1963) et en ce qui concerne les équations de l'optimum, s'inspire des travaux de F. BLONDEL (Congrès de FREIBERG 1959). Mais, il est beaucoup plus simple. On a seulement cherché

ici à sensibiliser le lecteur sur le mode d'approche à utiliser en géostatistique économique, en retraçant les lignes directrices principales et en précisant le calcul dans quelques cas particuliers simples, mais assez courants en pratique. Il va sans dire que le lecteur qui désirerait manipuler cette application de la géostatistique en vue de problèmes concrets, à moins de se trouver exactement dans les conditions de nos cas particuliers, aurait le plus grand avantage à remonter à l'étude complète, qui lui permettrait d'exercer bien mieux son esprit critique.

Si la connaissance d'un gisement était une variable en tout ou rien, on pourrait dire, suivant le vieil adage minier qu'on ne connaît un gisement que lorsqu'on l'a exploité. Mais en pratique, il n'en est pas ainsi et les campagnes de reconnaissance permettent par tâtonnements successifs d'avoir une connaissance de plus en plus précise de la minéralisation qu'on recherche, et de décider, au fur et à mesure, des décisions à prendre. Supposons qu'une première tranche de travaux de reconnaissance a déjà été exécutée. Elle a fourni des informations chiffrées sur le tonnage et la teneur du gisement reconnu, et les méthodes de la géostatistique ont permis de fixer la précision avec laquelle ces informations représentent la réalité. Une étude d'exploitabilité, d'autre part, a permis de définir pour quels tonnages et quelles teneurs, l'exploitation pouvait être payante. Au point crucial C auquel on est ainsi parvenu, trois décisions sont possibles. (figure 1).



Figure I-1: Schéma séquentiel des décisions relatives à l'exploitation d'un gisement.

- 1 - On décide de ne pas exploiter et on abandonne le gisement ;
- 2 - On décide d'exploiter tout de suite ;
- 3 - On décide de faire une 2ème tranche de travaux de reconnaissance.

Les critères de décision en C dépendent, on s'en doute bien, de la précision de la première estimation. Voilà donc un premier problème économique lié à la géostatistique.

Poursuivons l'analyse, en supposant maintenant qu'on a retenu la seconde solution, qui consiste à exploiter. Quel est le meilleur projet possible ? La réponse à cette question dépend de trois groupes de facteurs : économiques, techniques et miniers. Des études prévisionnelles de marché permettent de préciser les facteurs économiques, tant sur les cours que sur les débouchés possibles. Des essais de traitement en laboratoire, ou en usine pilote et l'étude détaillée des différentes méthodes d'exploitation permettent

de choisir et de chiffrer la meilleure solution technique. Nous ne parlerons pas davantage de ces deux premiers facteurs. Le second, en ce qui concerne les minerais lorrains, a suffisamment été étudié dans le cadre de la division minéral de l'Institut de Recherches de la Sidérurgie pour qu'on considère aujourd'hui ses résultats comme un acquis. De toutes façons, il nous suffit pour les besoins de notre problème de ne retenir de la structure du marché et des types d'exploitation et de traitement que quelques chiffres (prix de vente du minéral, investissements, dépenses annuelles).

Considérons le troisième facteur minier. L'on doit déterminer une cadence d'exploitation et une teneur de coupure optimales t_0 et x_0 . Or, l'imprécision des travaux de reconnaissances fournit pour ces paramètres deux valeurs t et x nécessairement différentes de celles de l'optimum. Il en résulte une perte P . Si l'on accroît la reconnaissance, P diminue, mais on dépense de l'argent en travaux de recherches. On doit donc déterminer le volume de ces travaux pour que la dépense qu'ils occasionnent, augmentée de la perte probable P soit minimale.

En résumé, l'étude se décompose en trois démarches, qui chronologiquement, apparaissent dans l'ordre suivant :

- 1 - Détermination des choix au cours de la chaîne séquentielle des recherches ou étude du risque de ruine ;
- 2 - Optimisation de la reconnaissance vis à vis du dimensionnement des installations (risque de ruine exclu) ;



Figure I-1: Schéma séquentiel des décisions relatives à l'exploitation d'un gisement.

- 1 - On décide de ne pas exploiter et on abandonne le gisement ;
- 2 - On décide d'exploiter tout de suite ;
- 3 - On décide de faire une 2ème tranche de travaux de reconnaissance.

Les critères de décision en C dépendent, on s'en doute bien, de la précision de la première estimation. Voilà donc un premier problème économique lié à la géostatistique.

Poursuivons l'analyse, en supposant maintenant qu'on a retenu la seconde solution, qui consiste à exploiter. Quel est le meilleur projet possible ? La réponse à cette question dépend de trois groupes de facteurs : économiques, techniques et miniers. Des études prévisionnelles de marché permettent de préciser les facteurs économiques, tant sur les cours que sur les débouchés possibles. Des essais de traitement en laboratoire, ou en usine pilote et l'étude détaillée des différentes méthodes d'exploitation permettent

de choisir et de chiffrer la meilleure solution technique. Nous ne parlerons pas davantage de ces deux premiers facteurs. Le second, en ce qui concerne les minerais lorrains, a suffisamment été étudié dans le cadre de la division minerai de l'Institut de Recherches de la Sidérurgie pour qu'on considère aujourd'hui ses résultats comme un acquis. De toutes façons, il nous suffit pour les besoins de notre problème de ne retenir de la structure du marché et des types d'exploitation et de traitement que quelques chiffres (prix de vente du minerai, investissements, dépenses annuelles).

Considérons le troisième facteur minier. L'on doit déterminer une cadence d'exploitation et une teneur de coupure optimales t_o et x_o . Or, l'imprécision des travaux de reconnaissances fournit pour ces paramètres deux valeurs t et x nécessairement différentes de celles de l'optimum. Il en résulte une perte P . Si l'on accroît la reconnaissance, P diminue, mais on dépense de l'argent en travaux de recherches. On doit donc déterminer le volume de ces travaux pour que la dépense qu'ils occasionnent, augmentée de la perte probable P soit minimale.

En résumé, l'étude se décompose en trois démarches, qui chronologiquement, apparaissent dans l'ordre suivant :

1 - Détermination des choix au cours de la chaîne séquentielle des recherches ou étude du risque de ruine ;

2 - Optimisation de la reconnaissance vis à vis du dimensionnement des installations (risque de ruine exclu) ;

3 - Etude du dimensionnement optimum en fonction du gisement.

Leur exposé doit suivre l'ordre inverse, puisque c'est seulement lorsqu'on a défini les éventualités en aval du point C et chiffré leurs rapports, que l'on peut calculer les diverses espérances mathématiques : il faut au préalable avoir approfondi le concept d'exploitabilité et cela conduit obligatoirement à poser le problème du dimensionnement optimum. Mais avant toutes choses, nous devons préciser le choix de nos paramètres, en particulier ceux relatifs aux calculs des réserves minérales.

2. LES CALCULS DE RESERVES

Le but technique d'un calcul de réserves est d'établir une estimation de la relation tonnage - teneur, définie au sens du chapitre V (le but économique consistant à faire intervenir cette estimation dans la détermination des paramètres de production et de reconnaissance).

Au niveau des moyens, deux facteurs bien différents interviennent. Il y a les limitations dues à la technologie minière proprement dite (taille minimale de panneaux, exploitation successive ou simultanée des couches superposées, stots de protection, anciens travaux terminés, etc...), et d'autre part l'estimation, par la géostatistique, des panneaux utilisables. Ces deux limitations n'interviennent pas de façon indépendante, et un panneau possédant toutes les caractéristiques minières requises pourra être rejeté si son krigeage lui attribue une teneur trop faible. Néanmoins, il nous paraît plus commode en pratique de bien séparer les deux étapes, quitte à procéder par itérations successives. En ce qui concerne le gisement de fer lorrain,

par exemple, on pourra procéder ainsi :

Dans un premier temps, on cartographiera, couche par couche, toutes les surfaces plus ou moins utilisables, depuis les zones vierges jusqu'aux zones totalement inintéressantes (stots de protection, régions déjà dépilées...) en particulierisant chacun des intermédiaires entre ces deux extrêmes (traçages, élargissements, traçages précédant de peu les élargissements, etc...). Les travaux très complets de E. TINCELIN sur l'exploitation du gisement ont débouché sur des règles de travail précises (1958), qu'il est inutile de rappeler ici, qu'on appliquera systématiquement. En définitive, on obtiendra une première partition de la couche P_1 .

Dans un deuxième temps, on reprendra la même portion de gisement (la couche entière ou une partie de celle-ci) et l'on appliquera une maille à l'ensemble des reconnaissances qu'elle contient. En général, on ne pourra pas mieux faire que choisir une maille aléatoire stratifiée, ou si la densité des sondages varie à grande échelle, la juxtaposition de plusieurs mailles de tailles différentes. Quoi qu'il en soit, l'ensemble représentera une seconde partition de la couche, P_2 . On krigera cette seconde partition à l'aide des procédés développés au chapitre VII, et l'on superposera le corroyage ainsi krigé à P_1 dont chacun des points prendra alors la valeur définie par la cartographie de krigeage.

Dans un troisième temps, on reviendra à P_1 et on en calculera la valeur carreau à la tonne b de chaque panneau exploitable séparément des autres, compte tenu de sa teneur et du prix de ses travaux d'approche d'exploitation et de transport. Chacune de ces unités élémentaires sera donc caractérisée en définitive par trois chiffres, sa teneur, son tonnage et

sa valeur marchande. A chaque valeur carreaubo, on fera correspondre la somme de tous les panneaux de teneur supérieure ou égale à bo et l'on calculera le tonnage T (bo) et la teneur moyenne m (bo).

Ce troisième temps du calcul suppose que le projet d'exploitation adopté est le meilleur. Le plus souvent, les installations étant déjà en place, ce sera effectivement le cas. Mais on peut très bien imaginer des transformations technologiques, comme la foration d'un puits supplémentaire, ou la prise simultanée de plusieurs couches. Devant un éventail de possibilités de ce genre, on choisira pour chaque valeur de bo, le projet conduisant au bénéfice maximal (l'expression du bénéfice en fonction de T et m est donnée par la formule (X, 7). Il n'est pas nécessaire que pour les différentes valeurs de b, ce projet reste toujours le même.

Par élimination de b entre T (b) et m (b), on obtiendra alors la fonction de réserves ou la relation tonnage-teneur de la régionalisation considérée. On se contentera de donner à b quelques valeurs économiquement plausibles, entre lesquelles on interpolera à l'aide des lois du type "loi de Lasky".

Voilà donc exposé le plan de calcul des réserves de gisement lorrain. Mais avant d'utiliser la fonction de réserves ainsi déterminée, il convient de préciser encore quelques points sur son mode d'obtention.

a - Il se peut que ces tailles des panneaux soient comprises entre deux échelles des phénomènes de transition. Si par exemple, leurs côtés varient de 500 à 1000 mètres, on devra faire intervenir dans les couches

entrecroisées deux régionalisations, les transitions T_5 et T_6 du chapitre III, de portées moyennes 400 mètres et 2,5 km. Les formules de krigeage aléatoire étant exprimées formellement en fonction des variances et covariances du $\gamma(h)$, on devra prendre pour fonction intrinsèque en pareil cas la somme de l'effet de pépite métrique, et de deux schémas de Matheron (alors que les abaques de krigeage aléatoire ne sont relatifs qu'à un seul schéma de Matheron). Toutefois, dès que la plus petite distance mise en jeu dans la configuration vaudra le triple de la portée de la transition hectométrique, on pourra la considérer comme un simple effet de pépite.

b - Pour ne pas alourdir l'exposé, on a passé sous silence, à peu près complètement, l'influence de la dimension perpendiculaire aux couches, ou verticale, sur notre plan de calcul. Nous avons constaté au chapitre III l'indépendance des différentes couches entrecroisées à l'aplomb d'un même point, et à une dérive près, la quasi indépendance des teneurs (couches entrecroisées) verticalement au delà d'une dizaine de centimètres. Par conséquent, le variogramme moyen de n couches superposées est la moyenne des variogrammes de chaque couche pondérés par les carrés de leurs puissances (cf. chapitre III). Par conséquent aussi, à l'intérieur de la partie homogène d'une couche (sans changement vertical de faciès) les variogrammes horizontaux correspondant à diverses puissances se déduisent du variogramme ponctuel par les formules de montée du chapitre VI. Comme la limite de puissance exploitable (2 m) est largement supérieure à la portée verticale (10 cm), les variogrammes horizontaux bâtis à partir des différentes puissances seront parallèles les uns aux autres, et posséderont chacun un effet de pépite inversement proportionnel à la puissance du support.

Reste le cas des pieds de couche hétérogènes par rapport au banc minéralisé (pieds argileux). On a vu au chapitre III que leur répercussion

sur l'effet de pépite variait selon le mode d'exploitation. On peut considérer que les portions de pied de couche ont, en elles-mêmes, un effet de pépite négligeable, car elles possèdent trop ou trop peu de calcite pour qu'on y puisse déceler des structures de migrations. Si donc l'exploitation prélève systématiquement une bande de pied de couche de puissance peu variable, l'effet de pépite de la partie entrecroisée, doit être multiplié par le rapport de la puissance entrecroisée moyenne sur la puissance totale, rapport inférieur à 1 (le même raisonnement peut être appliqué aux salissages par éboulement du toit dans les dépilages, il n'est pas constant lors de l'exploitation, mais pris en moyenne dans un panneau de 100 m . 100 m joue exactement le même rôle). De toutes façons, ces réductions de l'effet de pépite pourront être négligées en première approximation, et le variogramme pris égal au variogramme de la couche entrecroisée. Mais il existe un autre cas de figure dans les prises de marne de pied de couche. C'est celui où l'exploitant minier cherche à maintenir une puissance constante, alors que la régionalisation de la portion entrecroisée en possède une variable. A ce moment, le terme complémentaire est emprunté au pied de couche dans une proportion d'autant plus grande que la couche elle-même est plus mince. On est ramené à un problème géométrique qui se traduit, au contraire du précédent, par une déformation de tout le variogramme et une augmentation de l'effet de pépite. On pourra négliger la déformation du variogramme, mais on doit tenir compte du changement d'effet de pépite, calculable à partir du variogramme des puissances entrecroisées.

Les deux cas extrêmes que nous venons de citer sont évidemment idéaux, la pratique minière se situera entre les deux, absorbant plus ou moins les variations de puissance de nature géologique.

c - Nous n'avons pas parlé non plus des procédés techniques qu'on peut utiliser pour un calcul de réserves. Ils s'étagent depuis le simple bureau de géomètres jusqu'à l'utilisation d'un ordinateur ; étant donnée la taille du gisement de fer lorrain, cette dernière solution a été retenue par le service géologique de l'I. R. S. I. D. La mécanographie par elle-même ne pose pas de problèmes particuliers, mais elle permettra d'appliquer les plans ci-dessus et les calculs économiques qui vont suivre soit au niveau des mines elles-mêmes, soit à celui d'ensembles plus étendus, dans l'hypothèse de la construction de vastes ateliers d'enrichissement regroupant les produits extraits par plusieurs mines.

3. ETUDE DE L'OPTIMUM ECONOMIQUE

3. 1. Définition des paramètres

Supposons que les caractéristiques du gisement sont parfaitement connues. On a pu en particulier déterminer sans ambiguïté la meilleure méthode d'exploitation et le meilleur procédé de traitement possible. Il reste à choisir deux paramètres techniques essentiels :

- la cadence de production annuelle t
- la teneur limite ou teneur de coupure x . Ce dernier paramètre défini par l'équation $(V, 1) x = d (mT)/dT$, permettra de se situer sur le point optimum de la fonction des réserves. La fonction des réserves elle-même, établie numériquement, pourra le plus souvent entre certaines limites pas trop larges, être ajustée à la loi de Lasky :

(X, 1)

$$m = \alpha - \beta \log T$$

S'il apparaissait une autre loi, linéaire par exemple, ou la loi de Ross

$$(X, 2) \quad m = a'x + b'$$

dont la loi de Lasky est un cas particulier (MATHERON : Remarques sur la loi de Lasky) le calcul reste le même.

Les paramètres économiques utiles sont :

- le cours du marché, qu'on prendra constant (une étude économique plus poussée le considèrerait plutôt comme une variable régionalisée temporelle), en utilisant la formule linéaire

$$(X, 3) \quad V(m) = bm - b_0$$

- les frais annuels d'exploitation et de traitement rapportés à la tonne de minerai (exploitation, traitement, transports, frais généraux). On les représente par une fonction $p(t)$ décroissante, et l'on admet souvent la relation que nous adopterons :

$$(X, 4) \quad p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

qui implique pour les dépenses annuelles :

$$t p(t) = a_1 + a_0 t$$

une forme linéaire où a_1 et a_0 sont les frais fixes et les frais proportionnels.

- les investissements sont représentés par une fonction $I(t)$ croissante, alors que le rapport $I(t)/t$ décroît en fonction de t (on aurait sinon intérêt à scinder l'exploitation en plusieurs sièges autonomes). On prendra :

$$(X, 5) \quad I(t) = C_0 + C_1 t^\gamma \quad 0 < \gamma \leq 1$$

pour $C_0 = 0$ et $\gamma = 2/3$, on retrouve la loi empirique selon laquelle les investissements et la capacité varient respectivement comme le carré et le cube de la dimension des installations.

Enfin, il est commode d'introduire un paramètre supplémentaire, la durée de la vie N de la mine, liée au tonnage $T(m)$ et à la cadence d'exploitation t par la relation :

$$(X, 6) \quad N = \frac{T(m)}{t}$$

Le bilan prévisionnel de l'exploitation future se représente commodément par l'expression de la valeur actualisée des bénéfices futurs. Si i est le taux d'actualisation et Bi le bénéfice associé à ce taux d'intérêt, on a :

$$(X, 7) \quad Bi = \left[V(m) - p(t) \right] t \left(\frac{1 - e^{-iN}}{i} \right) - I(t)$$

et dans le cas très important où le taux i est pris égal à 0, le bénéfice non actualisé prend la forme très simple

$$(X, 8) \quad B = \left[V(m) - p(t) \right] \cdot T(m) - I(t)$$

3.2. Equations générales de l'optimum

Nous partons de l'expression (X, 7) de la valeur actualisée des bénéfices futurs, et nous cherchons les valeurs de m, t et N pour lesquelles Bi est maximal. Compte tenu de l'équation (X, 6) qui exprime une liaison entre m, t et N, le formalisme de Lagrange conduit aux équations suivantes de l'optimum :

$$(X, 9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Bi}{\partial t} &= \lambda N \\ \frac{\partial Bi}{\partial N} &= \lambda t \\ \frac{\partial Bi}{\partial m} &= - \lambda \frac{dT}{dm} \end{aligned}$$

auxquelles l'équation de liaison (X, 6) doit être jointe en vue d'éliminer le paramètre de Lagrange. Afin de simplifier les écritures, on posera :

$$(X, 10) \quad b = \frac{dV(m)}{dm}$$

Le paramètre b, qui représente la valeur du point de fer supplémentaire contenu dans une tonne de minerai, est une constante dans le cas particulier où l'on admet la relation (X, 3) : en pratique, en Lorraine, il en est toujours ainsi.

Avec l'expression (X, 7) de B_i , le système (X, 9) et la relation de liaison (X, 8) entraîne, après quelques calculs élémentaires :

$$(X, 11) \quad \begin{cases} (V - p) \left[\frac{1 - e^{-iN}}{i} - \frac{iN e^{-iN}}{i} \right] = I' + T \frac{(1 - e^{-iN})}{i} \frac{dp}{dt} \\ x = \frac{p}{b} + (m - x) \left[\frac{e^{iN} - 1 - iN}{iN} \right] \end{cases}$$

Ce système complété par l'équation (X, 6) et la fonction des réserves se résoud assez facilement par approximations successives. Dans le cas particulier où les teneurs n'interviennent pas, c'est-à-dire où la pente de la fonction des réserves dans le plan (T, m) est proche de l'horizontale, la première équation subsiste seule et détermine la cadence annuelle.

Mais outre son intérêt pour la résolution de nos problèmes, le système (X, 11) permet d'étudier les conséquences du choix du taux d'intérêt i . En effet, si $i \neq 0$, la première des deux équations montre qu'un gisement, même très grand et à la limite infinie, doit nécessairement être exploité en un nombre d'années restreint, ce qui est contradictoire (si i est différent de zéro et N infini, le système entraîne, quel que soit T , que $Vt \leq iT + pt$, autrement dit que l'exploitation est déficitaire). De plus la seconde équation du système pour $i = 0$ se réduit à :

$$(X, 12) \quad x = \frac{p}{b}$$

Ce n'est rien d'autre que la règle marginaliste suivant laquelle on exploite toute tonne qui paie ses frais en aval, règle effectivement appliquée

par les sociétés minières. Par contre, si $i \neq 0$ le terme complémentaire qui s'ajoute, manifestement positif (et nullement négligeable pour les taux d'actualisation courants) conduit à la pratique de l'écrémage, contraire à la fois à la moralité minière et au comportement des exploitants sérieux.

Dans les deux cas, la conclusion est la même : on n'obtient de résultats satisfaisants et conformes à la pratique réelle qu'à condition de prendre un taux d'actualisation égal à zéro. En fait, cela se comprend fort bien, car maximiser B_i revient à restreindre son attention sur la considération d'un siège d'exploitation unique. Or toutes les sources d'approvisionnement d'une société sidérurgique sont comparables entre elles, le critère de comparaison étant le prix de revient. Elle n'a aucune raison de se limiter à une concession particulière et peut fort bien avoir intérêt à exploiter simultanément plusieurs concessions avec des cadences plus faibles. Si elle ne veut pas se condamner à dépenser chaque année plus d'argent pour le même résultat, elle doit assurer son approvisionnement au plus faible prix de revient, donc en minimisant la somme des dépenses d'exploitation et d'investissements effectués pendant l'année en cours. Ce qui explique que les paramètres techniques seront déterminés par une condition d'optimum à $i = 0$.

3.3. Equations de l'optimum pour $i = 0$

Nous supposons par conséquent les paramètres techniques estimés à $i = 0$. En ce qui concerne le système (X, 11) il vient alors :

$$\text{X, 13) } \begin{cases} T \frac{dp}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0 \\ x = \frac{p}{b} \end{cases}$$

Si l'on adopte les expressions (X, 4) et X, 5) de $p(t)$ et $I(t)$, le système se particularise de la manière suivante :

$$(X, 14) \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \left[\frac{a_1 T(x)}{\gamma C_1} \right]^{\frac{1}{1+\gamma}} \\ x = \frac{1}{b} \left(a_0 + \frac{a_1}{t} \right) \end{array} \right.$$

et se résoud par approximations successives à l'aide de la fonction des réserves, ou ce qui revient au même de la relation $T(x)$ correspondante. Dans le cas particulier où $\gamma = 1$, la première équation donne la règle empirique suivant laquelle la cadence de production doit être prise égale à la racine carrée du tonnage.

Dans les applications de m et t déduites du système (X, 13) on exploitera si

$$(X, 15) \quad B_i(t_1, m) \geq 0$$

en choisissant pour expression du bénéfice l'expression (X, 7) définie à $i \neq 0$. En effet, il est naturel de ne pas actualiser les paramètres techniques, correspondants à la ventilation de dépenses à faire chaque année, il est au contraire tout à fait normal d'actualiser le bénéfice au moment de prendre la décision d'exploiter chaque concession particulière, conformément aux lois d'économies de concurrence. Car il ne s'agit plus là de l'optimisation de paramètres techniques, mais d'un choix en tout ou rien entre une exploitation bénéficiaire ou déficitaire.

Pour $B_i = 0$, le gisement (ou concession) est marginal. Cette égalité exprime le concept de limite d'exploitabilité tonnage/teneur à tout tonnage donné, la relation :

$$(X, 16) \quad B_i = V(m) - p(t) \cdot t \cdot \frac{1 - e^{-iT/t}}{i} - I(t) = 0$$

où t est calculé par le système (X, 13) associe une teneur limite d'exploitabilité $m_L(T)$ en dessous de laquelle le gisement n'est plus exploitable. Inversement, à toute teneur correspond un tonnage limite $T_2(m)$. Aussi on se gardera bien de confondre la teneur de coupure x avec la teneur limite d'exploitabilité $m_L(T)$.

4. RECONNAISSANCE OPTIMALE POUR LE DIMENSIONNEMENT DE L'EXPLOITATION

Nous avons supposé parfaitement connue au paragraphe précédent la relation $m(T)$. En réalité, nous n'en possédons qu'une estimation qui diffère plus ou moins, selon que la reconnaissance a été plus ou moins poussée. Ce désaccord entraîne une perte dont on peut chiffrer la valeur probable. On peut naturellement diminuer cette perte en effectuant des travaux de reconnaissance supplémentaires, qui permettront d'obtenir une meilleure estimation de (T, m) . Mais ces travaux, eux aussi, coûtent cher. Il y a un optimum, correspondant à un volume de travaux de reconnaissance telle que la somme de la perte et du coût des travaux de recherches soit minimale. Son caractère technique nous le fera calculer comme au paragraphe précédent avec $i = 0$. La résolution du système de l'optimum fournira la ventilation des crédits à travers l'exploitation et la reconnaissance et dans celle-ci, à travers les différents types de

travaux à effectuer. Nous ne résoudrons pas le problème dans le cas général qui nous entrainerait trop loin, mais dans un cas simple à exposer et courant en pratique, celui où la teneur de coupure est pratiquement imposée d'avance ou a peu d'influence sur la solution. (Nous renvoyons les lecteurs désireux de poursuivre l'étude à la référence de G. MATHERON et Ph. FORMERY, citée plus haut). On adoptera les relations (X, 4) et (X, 5) en donnant à γ la valeur 1.

4.1. Définition d'une cadence optima d'exploitation

Le bénéfice total à retirer de l'exploitation est alors une fonction de la cadence annuelle t

$$(X, 17) \quad B = (V - a_o - \frac{a_1}{t}) T_o - C_o - C_1 t$$

Pour le rendre maximum, il faudrait prendre pour cadence t_o la valeur qui annule la dérivée de B par rapport à t :

$$(X, 18) \quad \frac{a_1 T_o}{t_o^2} - C_1 = 0$$

$$t_o = \sqrt{\frac{a_1 T_o}{C_1}}$$

On trouve que la cadence optima doit être choisie proportionnelle à la racine carrée du tonnage réel de minerai, ce qui revient à épuiser le gisement en

$$N_o = \frac{T_o}{t_o} = \sqrt{\frac{C_1 T_o}{a_1}} \quad \text{années}$$

Or, ce tonnage réel T_o nous est inconnu, on n'en possède qu'une estimation T donnée par une campagne de sondages (ou de travaux miniers), plus ou moins précise. La géostatistique nous permet d'ailleurs de calculer à priori la variance de cette estimation, c'est-à-dire la variance d'estimation du tonnage de minerai :

$$E (T - T_o)^2 = \sigma_T^2$$

A défaut de connaître la vraie valeur T_o du tonnage, force nous est d'adapter la cadence d'exploitation t à la seule estimation que nous ayons en notre possession T

$$t = \sqrt{\frac{a_1 T}{C_1}} \neq t_o$$

En ces conditions, la cadence définie n'est pas égale à la cadence optima t_o .

4.2. Expression de la perte probable

Le bénéfice devient alors une fonction de l'estimation T par l'intermédiaire de t ,

$$B = \left[V - a_o - \frac{\sqrt{a_1 C_1}}{T} \right] T_o - C_o - \sqrt{a_1 C_1} \cdot \sqrt{T}$$

sa valeur maximale est donnée pour $T = T_o$

$$B_o = (V - a_o) T_o - C_o - 2 \cdot \sqrt{a_1 C_1 T_o}$$

Il est positif pour :

$$\sqrt{T} > \sqrt{T_L} = \frac{\sqrt{a_1 C_1} + \sqrt{a_1 C_1 + C_o (V - a_o)}}{V - a_o}$$

T_L est le tonnage limite d'exploitabilité.

Lorsque T est différent de T_o , il en résulte une perte inéluctable, donnée au voisinage de l'optimum B_o , grosso modo par le terme du second ordre dans le développement de TAYLOR de B au voisinage de T_o

$$B - B_o = \frac{(T - T_o)^2}{2} \left[\frac{d^2 B}{dT^2} \right]_o$$

Or

$$\frac{d^2 B}{dT^2} = -\frac{1}{2} \sqrt{a_1 C_1} [T_o]^{-3/2} = -\frac{\sqrt{a_1 C_1 T_o}}{2 T_o^2}$$

Or l'estimation T se distribue autour de la valeur vraie T_o avec une variance

$$E (T - T_o)^2 = \sigma_T^2$$

Il en résulte une valeur probable de la perte égale à :

$$(X, 19) \quad E (B_o - B) = \frac{\sqrt{a_1 C_1 T_o}}{4} \frac{\sigma_T^2}{T_o^2}$$

Nous avons remplacé dans la formule le tonnage réel inconnu T_o par son estimation T .

La valeur probable de la perte due à une reconnaissance imprécise est proportionnelle à la variance d'estimation du tonnage.

Remarque 1 :

L'expression obtenue de la perte probable dépend de la forme

$$p(t) = a_o + \frac{a_1}{t} \quad \text{du prix de revient à la tonne}$$

$$I(t) = C_o + C_1 t^\delta \quad \text{du montant des investissements.}$$

La perte probable se calcule très aisément dans le cas général, on aurait :

$$X, 20) \quad E(B_o - B) = \frac{1}{2} \left(\frac{p'^2}{I' p'' - p' I''} \right)^2 (T p'' P + I'') \sigma_T^2$$

les dérivées étant prises par rapport à t pour la valeur optima de t adaptée au tonnage.

Remarque 2 :

Si des travaux de reconnaissance préalables existent déjà au moment où l'on se pose le problème, rien n'est changé dans sa formulation. La conclusion risque simplement, le cas échéant, d'indiquer qu'il est inutile d'effectuer des travaux supplémentaires.

Remarque 3 :

Le lecteur trouvera dans les études pratiques de la troisième partie un exemple de recherche de cadence optimale d'exploitation et de volume optimal de reconnaissance (exercice L).

5. OPTIMISATION SEQUENTIELLE ET ARRET DES RECHERCHES

5.1. Position du problème

Il convient maintenant de réintroduire le risque de ruine. Nous avons admis dans le paragraphe précédent que la rentabilité du gisement avait pu être établie et nous avons déterminé le meilleur niveau de reconnaissance, en tenant compte de perte entraînée par un mauvais dimensionnement des installations. Les optima précédents étaient de nature technologique, alors que celui-ci est de nature économique. Il a pour but de répondre au mieux à la question : "A quel moment convient-il d'arrêter les recherches et de prendre une décision quant à la mise en exploitation du gisement ?"

On répondra à cette question en comparant les bénéfices associés à chaque décision possible en aval du point C de la figure (X - 1). Les deux premières éventualités sont aisément chiffrables. Si l'on décide d'exploiter, on est ramené à une expression du bénéfice analogue à celle du paragraphe précédent. La troisième éventualité (deuxième vague de sondages) est plus délicate et nous allons la regarder de plus près.

Cette deuxième phase de travaux de reconnaissance, que l'on envisage dans la 3^e décision, sera imposée par la technologie. Par exemple, si l'on a reconnu le gisement par traçages équidistants de 60 m, la deuxième phase consistera à tracer des sous-niveaux intermédiaires, de manière à ramener cette distance à 30 m. Ou bien, si l'on fait des sondages à maille carrée, la deuxième phase consistera à centrer la maille (c'est-à-dire à doubler le nombre des sondages). Cette deuxième phase ne dépend donc pas de façon continue d'un paramètre que l'on peut choisir. Elle est imposée et le seul choix possible consiste à la réaliser ou non.

Par contre, la géostatistique sera capable d'indiquer à l'avance la nouvelle précision avec laquelle le gisement sera connu après l'exécution de la deuxième phase de travaux de reconnaissance telle que la technologie l'impose. Tout le problème va consister à évaluer la valeur du supplément d'information que l'on peut ainsi acquérir, et de la comparer au prix de revient des travaux de reconnaissance eux-mêmes. Et, parmi les trois

décisions possibles, on devra choisir celle qui conduit à la plus grande valeur probable du bénéfice futur, en aval du point C, c'est-à-dire sans tenir compte des dépenses antérieures (mais en tenant compte, pour la troisième décision, du prix de revient de la deuxième tranche de travaux de reconnaissance, puisque celle-ci n'est pas encore exécutée). Dans le cas général, il y a interférence entre le tonnage T, la teneur moyenne m, et la teneur limite d'exploitabilité m_0 . Si l'on augmente m_0 , le tonnage T disponible diminue en général, tandis que m augmente. Mais inversement, s'il se trouve que le tonnage réel est plus important qu'on ne s'y attendait, il est en général possible d'abaisser la teneur limite m_0 , ce qui par contre-coup modifie à nouveau T et m. Nous allons nous limiter au cas simple suivant :

Le tonnage réel T et la teneur limite m_0 peuvent être considérés comme connus a priori. La décision à prendre dépend alors uniquement de la teneur m. Ce cas correspond à peu près à la plupart des petites et moyennes "concessions ou portions de concessions", pour lesquelles les travaux de première phase permettent de fixer le tonnage avec une précision bien meilleure que la teneur.

5.2. Cas où la teneur intervient seule

Si le tonnage est T, la teneur limite m_0 et la teneur réelle (inconnue) z, le bénéfice que l'on retirerait d'une exploitation serait :

$$(X, 21) \quad B = A T (z - m_0)$$

la constante représentant la valeur carreau du point de métal contenu dans une tonne de minerai. Si au contraire on décide de fermer tout de suite le chantier

et d'abandonner le gisement, on aura par définition :

$$B = 0$$

La première décision conduit à un bénéfice nul (en aval du point C). En ce qui concerne la deuxième décision, elle conduit à un bénéfice donné par (X, 17), donc positif si $z > m_0$ et négatif si $z < m_0$. Mais la teneur réelle z est inconnue. On ne connaît seulement une estimation m , à partir des travaux de reconnaissance de la première phase. On peut alors assimiler z à une certaine variable aléatoire de valeur probable m , et dans ces conditions la valeur probable du bénéfice futur - dans l'hypothèse où l'on choisit la deuxième décision - est :

$$E(B) = A T (m - m_0)$$

A la différence de (X, 17), cette équation ne représente plus un bénéfice certain. La teneur réelle z du gisement peut, en effet, différer notablement de m par excès ou par défaut - et l'on aura alors un bénéfice plus important ou au contraire plus faible ou même une perte. Mais si l'on disposait de mille gisements semblables ayant tous donné cette teneur estimée m , le bénéfice moyen que l'on réaliserait en les exploitant tous serait exactement : $A T (m - m_0)$.

On voit - c'était bien évident à priori - que si le choix se limitait aux deux premières décisions (abandonner définitivement ou exploiter tout de suite), le critère serait donné par le signe de $m - m_0$; on exploiterait si la teneur limite était inférieure à la teneur estimée m , on fermerait dans le cas contraire.

Examinons maintenant ce qui se passe si l'on décide de faire une deuxième tranche de travaux de reconnaissance. Antérieurement, à cette phase, z est une variable aléatoire de valeur probable :

$$E(z) = m$$

et de variance σ_E^2 (calculable par la géostatistique). Après avoir exécuté cette deuxième phase, on aura une nouvelle estimation y et z , plus précise que le première et z aura la valeur probable

$$E(z) = y$$

et la variance σ_E^2 (inférieure à σ_E^2) calculable à priori par la géostatistique. A ce moment là, on examinera si cette nouvelle estimation y est ou non supérieure à la teneur limite m_0 . On ne tiendra pas compte de l'éventualité, en général peu réaliste, où l'on déciderait une troisième phase de recherche. D'après ce qui précède, on décidera d'exploiter si y est supérieure à m_0 , et alors :

$$(X, 23) \quad E(B) = A T (y - m_0) > 0$$

Si au contraire, y est inférieure à m_0 , on décidera de fermer, et on aura :

$$(X, 24) \quad E(B) = 0$$

Telle sera la situation au point C'. Mais nous sommes au point C, où les travaux de deuxième tranche n'ont pas encore été réalisés. On doit donc diminuer $E(B)$ du prix de revient P de ces travaux de reconnaissance. Et

d'autre part, y n'est pas encore connu, mais peut être considérée comme une variable aléatoire de valeur probable m et de variance σ^2 . On voit facilement que l'on doit avoir :

$$\sigma_E^2 = \sigma_{E'}^2 + \sigma^2$$

En effet, on a :

$$\sigma^2 = D^2 (y - m)$$

$$\sigma_E^2 = D^2 (z - m)$$

$$\sigma_{E'}^2 = D^2 (z - y)$$

et les différences $(z - y)$ et $(y - m)$ sont indépendantes. On en tire :

X, 26)

$$\sigma^2 = \sigma_E^2 - \sigma_{E'}^2$$

Le nuage de corrélation de la figure (X - 2) résume bien les données du problème. On porte y en abscisse et z en ordonnée, et chaque point représente un gisement possible. Le nuage est centré au point (m, m) et s'allonge le long de la première bissectrice, puisque la valeur probable de z lorsqu' y est connue est y . (La droite de régression a une pente égale à l'unité).

Prenons par exemple le cas $m > m_0$. Si l'on avait choisi la deuxième décision, on aurait exploité non seulement tous les gisements bénéficiaires des quadrants 1 et 4 situés au dessus de l'horizontale d'ordonnée m_0 , mais également tous les

gisements déficitaires des quadrants 2 et 3 situés au-dessous. Si au contraire, on choisit la troisième décision, les travaux de reconnaissance supplémentaires vont nous donner une nouvelle estimation y . On exploitera si $y > m_0$, c'est-à-dire dans tous les cas bénéficiaires du quadrant 1, mais aussi dans les cas déficitaires (beaucoup moins nombreux) du quadrant 2. Si au contraire, $y < m_0$, on fermera : dans les cas nombreux du quadrant 3, on évitera une perte, mais aussi dans les cas beaucoup moins nombreux du quadrant 4 on manquera ainsi un gain. L'effet global sur $E(B)$ est évidemment positif, mais il convient d'en retrancher le coût P des travaux de reconnaissance eux-mêmes.

Pour faire un calcul exact, il faut admettre une hypothèse sur la loi de probabilité des variables z et y . En pratique, cette hypothèse n'a pas grande influence sur le résultat. On obtient des résultats numériques comparables avec, par exemple, des lois normales ou lognormales. Nous avons choisi la loi lognormale, qui conduit à des formules plus élégantes.

Soit donc y une variable lognormale de médiane γ et de variance logarithmique σ^2 . Dans une telle loi, la moyenne de la variabilité s'exprime en fonction de la médiane et de la variance par :

$$(X, 27) \quad E(y) = m = \gamma e^{\sigma^2/2}$$

On prend la variable normale réduite :

$$(X, 28) \quad Y = \frac{1}{\sigma} \log \frac{y}{\gamma} = \frac{1}{\sigma} \log \frac{y}{m} + \frac{1}{2}$$

y s'exprime au moyen de la variable réduite Y par :

$$y = \gamma e^{\sigma Y}$$

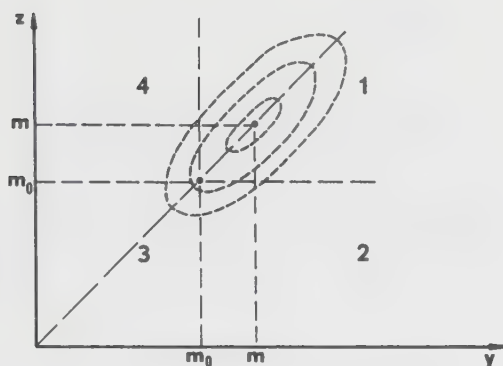


Figure I-2

A y fixé $> m_0$, le bénéfice est donné par (X, 23) tandis qu'il est nul pour $y < m_0$; on a donc au total :

$$E(B) = \frac{A T}{\sqrt{2 \pi}} \cdot \int_{Y_0}^{\infty} (\gamma e^{\sigma Y} - m_0) e^{-Y^2/2} \cdot dY - P$$

Y_0 étant la variable réduite (X, 28) associée à la teneur limite :

$$Y_0 = \frac{1}{\sigma} \log \frac{m_0}{m} + \frac{\sigma}{2}$$

$$(X, 29) \quad E(B) = A T \left[m G(Y_0 - \sigma) - m_0 G(Y_0) \right] - P$$

La fonction G étant l'intégrale classique de Gauss, donnée par les tables :

$$G(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

et P le coût de la seconde tranche de travaux de reconnaissance.

En résumé, chacune des trois décisions conduit à une valeur calculable de l'espérance mathématique du bénéfice futur, comme le montre le tableau ci-dessous :

(X, 30)	(	I. (Abandonner le gisement)	$E(B_1) = 0$
	(	II. (Exploiter)	$E(B_2) = A T (m - m_0)$
	(	III. (2e tranche de travaux	$E(B_3) = A T \left[m G(Y_0 - \sigma) - m_0 G(Y_0) \right]$
	(	de reconnaissance)	$- P$

On choisira naturellement celle des trois décisions qui rend maximale l'espérance mathématique du bénéfice futur. Les calculs devront être conduits avec quelque précision, car, en valeur relative $E(B_2)$ et $E(B_3)$ diffèrent en général bien peu. On trouvera dans les études pratique, l'exercice K, qui constitue une application numérique de ce problème.

Les calculs, on le voit, sont aisés à conduire dans le cas simple que nous avons considéré. Bien que l'étude ait été traitée de façon plus générale dans la référence déjà indiquée, le cas étudié suffira souvent en pratique. Il convient à ce sujet, de lever certaines restrictions dues au langage même de l'exposé. On a parlé de gisement, ou de concession, et de teneur. Il faut entendre ces termes au sens large. "Teneur", par exemple, signifie pour un minerai lorrain aussi bien sa teneur chimique que ses teneurs minéralogiques ou paragenèses. Pour une paragenèse donnée, la teneur de coupure (teneur en fer) n'est pas la même que pour une autre ni les types d'installations de traitement. Mais fondamentalement, cela ne change rien aux problèmes économiques étudiés. De même "gisement" ne veut pas dire : "le gisement lorrain dans son ensemble". Etant données les dizaines de milliers de prélèvements (sondages, prélèvements en couche) qui le reconnaissent aujourd'hui, les études qui précèdent perdraient toute raison d'être. On entendra plutôt par "gisement" ou "concession" tout siège, ou groupe de sièges fonctionnant de façon autonome, et même, pour un siège donné, une portion de couche, en direction de laquelle l'exploitant hésite à lancer ses travaux. A ces niveaux là, par contre, il arrivera fréquemment que la reconnaissance soit trop pauvre et que les études précédentes montrent alors toute leur utilité.

